1. Übung: Wiederholung Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

1. Berechnen Sie für die Funktion $f(x,y) := \mathrm{e}^{x\sin(xy)}$ sämtliche partiellen Ableitungen 1. Ordnung!

2. Zeigen Sie:

   (a) $f(x,y) := \mathrm{e}^{\frac{x^2}{y^2}}$ genügt der Gleichung $xf_x + yf_y = 0$.

   (b) $f(x,y) := \tan(x^2y^3)$ genügt der Gleichung $3xf_x - 2yf_y = 0$.

3. Berechnen Sie das totale Differential $\mathrm{d}f$!

   (a) $f(x,y) := \frac{y}{x},\ \ x_0 = 2,\ y_0 = 1;\ \ \mathrm{d}x = 0{,}1,\ \mathrm{d}y = 0{,}2$

   (b) $f(x,y) := \mathrm{e}^{xy},\ \ x_0 = 1,\ y_0 = 2;\ \ \mathrm{d}x = -0{,}1,\ \mathrm{d}y = 0{,}2$

4. Vergleichen Sie für die Funktion $f(x,y) := xy$ im Punkt $(5,4)$ die Funktionswertdifferenz Δf mit dem totalen Differential $\mathrm{d}f$, wenn sich die x- bzw. y-Koordinate um $\mathrm{d}x = 0{,}1$ bzw. $\mathrm{d}y = -0{,}2$ ändert!

5. In welche Richtung ist der Anstieg der Funktion $f(x,y) := \sqrt{xy}$ im Punkt $(4,2)$ am größten? In welche Richtung ist der Anstieg Null?

6. Bestimmen Sie für die Funktion $f(x,y) := \frac{4}{x^2+y^2}$

   (a) die Niveaulinien (das sind Kurven, auf denen der Funktionswert konstant ist) und

   (b) $\|\nabla f\|$ im Punkt $(-1,2)$!

7. (a) Zeigen Sie, dass $f(x,y) := \ln(x^2+y^2)$ eine Lösung der Laplaceschen Differentialgleichung $f_{xx} + f_{yy} = 0$ ist!

   (b) Ist $f(x,y,z) := \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ eine Lösung der Differentialgleichung $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$?

8. (a) Berechnen Sie U_r und U_φ für die Funktion $U(r,\varphi) := u(x,y)$, $x := r\cos\varphi$, $y := r\sin\varphi$!

   (b) Zeigen Sie, dass gilt $u_{xx} + u_{yy} = \frac{1}{r}(r\,U_r)_r + \frac{1}{r^2}U_{\varphi\varphi}$!

Dieses und weitere Übungsblätter finden Sie unter
`www.tu-chemnitz.de/mathematik/wire/WS2017_18/ma3.php`