Übung 6

HA-Abgabe bis 12. Januar 2016

Aufgabe 1: Herleitung Sensitivitätsgleichung

Wir betrachten die Lösung des skalaren AWPs

$$y'(t) = f(t, y(t)) \qquad \forall t \in [0, T], \qquad\qquad y(0) = y_a$$

$(n = 1)$ in Abhängigkeit vom Anfangswert, also

$$y(t; y_a).$$

Leiten Sie die Sensitivitätsgleichung

$$W'(t) = f_y(t, y(t; y_a))\, W(t) \qquad \text{in } [0, T], \quad W(0) = I_{n\times n} \qquad (\textbf{??})$$

her, durch die die Ableitung nach den Anfangsdaten y_a beschrieben wird,

$$W(t) := \frac{\partial}{\partial y_a} y(t; y_a).$$

Alle Funktionen seien dabei als hinreichend glatt vorausgesetzt.

Aufgabe 2: Stabiles MSV mit $r = 2$

Gegeben ist ein lineares MSV der Form

$$y_{i+2} + \alpha_1\, y_{i+1} + \alpha_0\, y_i = h\, (\beta_1\, f_{i+1} + \beta_0\, f_i).$$

Im Beispiel aus der Vorlesung wurde gezeigt, dass das entsprechende Verfahren maximaler Ordnung instabil ist.

(a) Geben Sie die Bedingungen für α_1 an, so dass das Verfahren nullstabil ist und die erste Konsistenzbedingung $\alpha_0 + \alpha_1 = -1$ erfüllt.

(b) Konstruieren Sie die einparametrige Familie der nullstabilen Verfahren möglichst hoher Konsistenzordnung. Geben Sie ein Beispiel aus dieser Familie für ein schon bekanntes Verfahren an.

Hausaufgabe 1: Implementierung zweier MSV

(a) Programmieren Sie das Verfahren der expliziten Mittelpunktsregel

$$y_{i+2} = y_i + 2\,h\,f_{i+1}.$$

Als Funktionsschnittstelle können Sie z.B. wie bisher

```
function y = ExpMittelpunktsregel(f,t0,T,h,y0)
```

mit den bekannten Aufrufargumenten verwenden. Sie müssen dann nur beachten, dass `y0` nun eine Matrix sein muss, in der (z.B. spaltenweise) die Anfangsnäherungen für y_0 und y_1 eingetragen sind.

(b) Programmieren Sie (analog zu (a)) das explizite Zweischritt-Adams-Bashforth-Verfahren

$$y_{i+2} = y_{i+1} + \tfrac{h}{2}\,(3\,f_{i+1} - f_i).$$

(c) Wenden Sie beide Verfahren an, um das AWP

$$\dot{y} = \lambda\,y, \quad y(0) = 1 \tag{1}$$

auf dem Intervall $[0, 8]$ mit dem Parameterwert $\lambda = -1$ zu lösen. Benutzen Sie die exakten Startdaten $y_0 = 1$ und $y_1 = \exp(-h)$, sowie die Schrittweiten

$$h_k = 0.5^k, \quad k = 0, 1, \ldots, 15.$$

Geben Sie eine Tabelle aus, in der sowohl die Fehler beider Verfahren (in der diskreten Maximumsnorm), als auch die zugehörigen geschätzten Konvergenzordnungen (mit beiden bekannten Methoden) eingetragen sind. Plotten Sie die Fehler in einer doppelt logarithmischen Skala über h und verifizieren Sie die erwarteten Konvergenzordnungen mit Steigungsdreiecken.

(d) Stellen Sie die Lösungen zur Schrittweite $h_3 = 0.125$ geeignet grafisch dar.

(e) Geben Sie die Differenzengleichungen an, die die durch die beiden Verfahren erzeugten Näherungslösungen erfüllen. Veranschaulichen Sie die Nullstellen der zugehörigen charakteristischen Polynome über $h \in [0, 1]$.

Hinweis. Sie dürfen bei beiden Verfahren exakte Startwerte vorgeben. Beachten Sie: Im Unterschied zu ESV *darf* der letzte Zeitschritt nicht begrenzt werden, denn dann wären die Berechnungsvorschriften der MSV nicht mehr sinnvoll definiert. Sie müssen also unter Umständen in Kauf nehmen, „etwas zu weit“ zu integrieren.

(6 Punkte)