Übung 4

Aufgabe 1: Darstellung der Stabilitätsfunktion von RKV

Zeigen Sie die Darstellung

$$\begin{aligned} R(z) &= 1 + z\, c^\top (I_{s\times s} - zB)^{-1}\, \vec{1} \\ &= \frac{\det(I_{s\times s} - zB + z\,\vec{1}\,c^\top)}{\det(I_{s\times s} - zB)}. \end{aligned}$$

der Stabilitätsfunktion aus der Vorlesung.

Aufgabe 2: Stabilitätsfunktion bei linearen Dgl-Systemen

Zeigen Sie den folgenden Satz:
Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalisierbar mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$:

$$T^{-1}AT = \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Gegeben seien ein s-stufiges RKV mit Stabilitätsfunktion R und die Dgl.

$$y' = A\,y, \qquad y(0) = y_0.$$

Dann gilt:

(a) $R(hA)$ ist wohldefiniert und es gilt

$$y_{i+1} = R(hA)\, y_i.$$

(b) Für eine gegebene Schrittweite $h > 0$ erfüllen die Näherungen $y_i \to 0$ für $i \to \infty$ genau dann, wenn

$$|R(h\lambda_j)| < 1 \quad \text{für alle } j = 1, \ldots, n.$$

Hausaufgabe 1: Stabilitätsgebiete der θ-Methode

(a) Zeigen Sie: Das Stabilitätsgebiet der Einschritt-θ-Methode

$$y_{i+1} = y_i + h\big[(1-\theta)\, f(t_i, y_i) + \theta\, f(t_{i+1}, y_{i+1})\big],$$

ist gegeben durch

$$S = \begin{cases} \{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{1}{2\theta-1}| \leq \frac{1}{1-2\theta}\} & \text{für } \theta < 1/2, \\ \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \leq 0\} & \text{für } \theta = 1/2, \\ \{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{1}{2\theta-1}| \geq \frac{1}{2\theta-1}\} & \text{für } \theta > 1/2. \end{cases}$$

(b) Schreiben Sie ein Programm (z.B. mit Hilfe des MATLAB-Befehls `contourf`), das S in Abhängigkeit von θ visualisiert. Lassen Sie damit die Stabilitätsgebiete für $\theta \in \{0, 0.1, 0.2, 0.4, 0.5, 0.6, 0.8, 0.9, 1\}$ ausgeben, vgl. Wie in der Abbildung aus der Vorlesung zu Stabilitätsgebieten der θ-Methode.

Hinweis. Der MATLAB-Befehl `complex` erzeugt aus gegebenen Real- und Imaginärteilen komplexe Zahlen. Diese können dann (z.B. von einer Stabilitätsfunktion) ganz normal weiter verarbeitet werden. Hilfreich kann auch der Befehl `meshgrid` sein. (3 Punkte)

Hausaufgabe 2: Implementierung der impliziten Mittelpunktsregel

Wir betrachten die implizite Mittelpunktsregel (siehe Vorlesung).

(a) Geben Sie das Newton-Verfahren zum Lösen des i. A. nichtlinearen Gleichungssystems für die Steigung k_1 an.

(b) Implementieren Sie die implizite Mittelpunktsregel unter Verwendung des Newton-Verfahrens aus (a). Sie müssen dazu die Ableitung von $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ nach y auswerten können. Dies kann z. B. dadurch erreicht werden, dass in der Funktionsschnittstelle

```
function [y, nNewton] = implMidpoint(RHS, t0, T, h, y0, nmax)
```

das function-handle `RHS` der rechte Seite so implementiert ist, dass bei Bedarf die zwei Werte `[f, df]` zurückgegeben werden:

```
function [f,df]=RHS(t,y)      .
```

Stellen Sie sicher, dass stets zumindest ein Schritt des Newton-Verfahrens durchgeführt wird und dass solange iteriert wird, bis das Residuum kleiner als 10^{-8} ist oder `nmax` $= 10$ Iterationen durchgeführt wurden. Verwenden Sie als Startwert der Newton-Iteration jeweils 0. Geben Sie in `nNewton` die Anzahl der durchgeführten Newton-Schritte pro Zeitschritt (Durchschnitt) aus.

(c) Testen Sie ihr Programm mit dem AWP des logistischen Wachstums

$$y'(t) = r\, y \left(1 - \frac{y}{k}\right), \quad y(0) = y_0,$$

das etwa zur Modellierung von Fischpopulationen verwendet werden kann. Dabei ist r die Wachstumsrate, k entspricht dem natürlichen Gleichgewicht der Population. Dieses AWP wird durch

$$y(t) = \frac{k}{1 - \left(1 - \frac{k}{y_0}\right) \exp(-r\, t)}$$

gelöst.

Verwenden Sie zur numerischen Lösung als Startwert $y_0 = 10$ und setzen Sie die Parameter auf $r = 0.5, k = 5$. Lösen das AWP dann für die Schrittweiten

$$h_n = 0.4 \cdot 2^{-n}, \quad n = 0, 1, \ldots, 10$$

im Intervall $[0, 5]$. Zeichnen Sie die Fehler in einen doppelt-logarithmischen Plot ein und schätzen Sie die Konvergenzordnung. Wie viele Newton-Schritte müssen durchschnittlich pro Zeitschritt durchgeführt werden?

(d) Implementieren Sie das vereinfachte Newton-Verfahren, dabei wird $F'(k)$ nur im ersten Schritt ausgewertet und dann in folgenden Iterationen unverändert weiterverwendet. Vergleichen Sie anhand des Beispiels aus (c), wie viele Newton-Schritte jetzt durchschnittlich pro Zeitschritt durchgeführt werden müssen.

(5 Punkte)