Übung 1

Aufgabe 1: Überführen auf Dgl.-System 1. Ordnung

Zeigen Sie, dass sich jedes AWP der Form

$$y^{(m)}(t) = f\big(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(m-1)}(t)\big), \tag{1a}$$
$$y^{(k)}(0) = y_{0,k}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1 \tag{1b}$$

in ein Dgl.-System 1. Ordnung überführen lässt. Was bedeutet dies für die numerische Lösung von (1)?

Aufgabe 2: Beweis der Gronwall-Ungleichung

Beweisen Sie die Gronwall-Ungleichung aus der Vorlesung:

Lemma
Seien $\varphi, L, C : [0,T] \to \mathbb{R}$ nicht-negative stetige Funktionen. Die Funktion C sei monoton wachsend. Wenn die Abschätzung

$$0 \leq \varphi(t) \leq C(t) + \int_0^t L(s)\,\varphi(s)\,\mathrm{d}s \quad \text{für alle } t \in [0,T]$$

erfüllt ist, dann gilt:

$$0 \leq \varphi(t) \leq C(t)\,\exp\Big(\int_0^t L(s)\,\mathrm{d}s\Big) \quad \text{für alle } t \in [0,T].$$

Aufgabe 3: Implementierung des Expliziten Euler-Verfahrens

Implementieren Sie das explizite Euler-Verfahren. Die Funktionsschnittstelle in MATLAB könnte dabei wie folgt aussehen:

```
function y = ExpliziterEuler(f, t0, T, h, y0),
```

wobei `f` ein `function_handle` ist, welches die rechte Seite des entsprechenden AWPs implementiert. Testen Sie das Programm mit dem Räuber-Beute-Modell aus der Vorlesung. Verwenden Sie die folgenden Startwerte und Parameter:

$$y_0 = (100, 10), \quad T = 20, \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 2, \quad \beta_1 = \beta_2 = 0.05.$$

Zeichnen Sie die beiden Komponenten der Lösung in einem gemeinsamen Bild. Verwenden Sie eine Legende und eine angemessene Achsenbeschriftung.

Aufgabe 4: Anziehende Punkte

Gegeben seien n Punkte $\{z_1, \dots, z_n\}$ in der Ebene. Der Punkt z_i fühlt sich von Punkt z_{i+1} angezogen, d. h. es gelte die Beziehung

$$\dot{z}_i = z_{i+1} - z_i \qquad i = 1, \dots, n-1$$

Entsprechend fühlt sich Punkt z_n von z_1 angezogen.

Formulieren Sie das Problem als Anfangswertaufgabe und lösen Sie es numerisch mit dem expliziten Eulerverfahren aus Aufgabe 3. Als Anfangswert soll eine zufällige Verteilung der Punkte in $[0,1] \times [0,1]$ verwendet werden. Benutzen Sie dabei verschiedene Werte für n und T und illustrieren Sie die Lösung entsprechend.

Aufgabe 5: Expliziter Euler in der Praxis

Wenden Sie das explizite Euler-Verfahren aus Aufgabe 3 auf das AWP

$$y'(t) = -0.1\, y(t), \quad y(0) = \pi \tag{2}$$

im Intervall $[0, 0.2]$ an. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(a) Verifizieren Sie, dass $y(t) = \pi \exp(-0.1\, t)$ die Lösung von (2) ist.

(b) Berechnen Sie die Näherungslösungen von (2) zu den Schrittweiten $h_i = 0.2 \cdot (0.5)^i,\ i = 0, 1, 2, \dots, 12$.

(c) Plotten Sie die Fehler $|e_N|$ über den Gitterweiten h_i in doppelt logarithmischer Skala.

(d) Berechnen Sie die Näherungslösungen von (2) zu den Schrittweiten $h_i = 0.2 \cdot (0.5)^i,\ i = 0, 1, 2, \dots, 12$ in `single precision` Arithmetik. Dies können Sie (in MATLAB) ganz einfach dadurch erreichen, dass sie beim Initialisieren des Outputs im expliziten Euler-Verfahren statt

```
y = zeros(...,...);
```

den Befehl

```
y = single(zeros(...,...));
```

verwenden.

(e) Plotten Sie erneut die Fehler $|e_N|$ über den Gitterweiten h_i in doppelt logarithmischer Skala. Was beobachten Sie und wie ist das Phänomen zu erklären?