Technische Universität Chemnitz — Sommersemester 2018
Fakultät für Mathematik – Professur Wissenschaftliches Rechnen
Prof. Dr. Martin Stoll, Dominik Alfke

Einführung in die Numerik – Aufgabenblatt 9.

Problem 1 **(Hausaufgabe, 8 Punkte)**

Wir betrachten das eindimensionale Anfangswertproblem auf dem Intervall $[0, T]$

$$y \in \mathcal{C}^1([0,T],\ \mathbb{R}), \qquad \dot{y}(t) = f(t,\ y(t)) \quad \forall\ t \in [0,T], \qquad y(0) = y_0.$$

Wir wollen $y(T)$, den Endpunkt der Trajektorie, durch eine Variante des Crank-Nicolson-Verfahren mit N Schritten berechnen. Seien $h = T/N$, $t_k = kh$ und y_k die berechnete Approximation an $y(t_k)$ für $k = 0, \dots, N$. Das Verfahren beruht auf der Ableitungsnäherung

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} \approx \dot{y}\left(t_k + \frac{h}{2}\right) = f\left(t_k + \frac{h}{2}, y\left(t_k + \frac{h}{2}\right)\right) \approx f\left(t_k + \frac{h}{2}, \frac{y_k + y_{k+1}}{2}\right)$$

für $k = 0, \dots, N-1$ und ist demnach ein implizites Einschrittverfahren.

a) Wir berechnen y_{k+1}, indem wir bei der obigen Approximation fordern, dass die linke und rechte Seite gleich sind. Schreiben Sie dies für festes k als Gleichung der Form $F_k(z) = 0$ für $z = y_{k+1}$ mit geeignet definiertem F_k und geben Sie die Ableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}F_k(z)$ in Abhängigkeit von der Funktion f an. Wenn diese nichtlineare Gleichung durch ein iteratives Verfahren $z_i \to z_{i+1}$ gelöst werden soll, was ist dann eine gute Wahl für den *“initial guess”* z_0?

b) Implementieren Sie das resultierende Verfahren in einer Matlab-Funktion

```
function y = crankNicolson(f, fy, y0, T, N)
```

wobei `f` und `fy` zwei *function handles* sind, die jeweils zwei Argumente `t` und `y` annehmen und daraus $f(t, y)$ bzw. die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)$ berechnen. Der Rückgabewert `y` soll der Wert der Trajektorie im Endzeitpunkt $t = T$ sein. Lösen Sie die resultierenden nichtlinearen Gleichungssysteme $F_k(z) = 0$ durch das Newton-Verfahren (vgl. Aufgabenblatt 8) mit Startwert z_0 aus a), maximaler Iterationszahl 100 und frühzeitigem Abbruch bei Erreichen der Toleranz $|F_k(z_i)| < 10^{-10}$.

c) Testen Sie das Verfahren für $N = 10$ am Beispiel des Anfangswertproblems mit

$$f(t, y) = \frac{t+1}{y+2}, \qquad y_0 = 1, \qquad T = 1$$

und geben Sie den absoluten Fehler gegenüber der exakten Lösung $y(1) = \sqrt{12} - 2$ an.

Problem 2

Wir betrachten eine einfache Klasse von zeitunabhängigen ODEs der Form

$$y \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}), \qquad \dot{y}(t) = f(y(t))\ \forall t \in [0,1], \qquad y(0) = 0$$

mit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Der Satz von Picard-Lindelöf besagt, dass dieses Problem eine eindeutige Lösung besitzt, wenn f gleichmäßig Lipschitz-stetig ist. Zeigen Sie, dass diese Aussage nicht gilt, wenn man von f nur klassische Stetigkeit fordert. Geben Sie dazu eine stetige Funktion f an, für die die obige ODE sowohl die konstante Nulllösung als auch eine nichtkonstante Lösung hat, und zeigen Sie, dass f nicht (gleichmäßig) Lipschitz-stetig ist.

Problem 3

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion, die aber auch komplex ausgewertet werden kann und als $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ komplex differenzierbar ist.
Wie kann man mit einer einzigen Funktionsauswertung $f(x_0 + ih)$, wobei i die imaginäre Einheit und h eine kleine reelle Zahl ist, die Ableitung $f'(x_0)$ mit Fehlerordnung $\mathcal{O}(h^2)$ approximieren? Nennen Sie einen weiteren numerischen Vorteil dieser Methode gegenüber dem klassischen Differenzenquotienten!

Problem 4

Das zweidimensionale Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1(t) &= \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} y_1(t) + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} y_2(t) & \qquad y_1(0) &= 2 \\
\dot{y}_2(t) &= \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} y_1(t) + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} y_2(t) & \qquad y_2(0) &= 0
\end{aligned}$$

mit $\lambda_i < 0$ besitzt die analytische Lösung

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t} \\
y_2(t) &= e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}
\end{aligned}$$

für $t \in \mathbb{R}$.
Implementieren Sie die numerische Lösung dieser ODE mit Anfangsbedingung $y_1(0) = 2$, $y_2(0) = 0$ auf dem Intervall $[0, 1]$ durch das explizite Euler-Verfahren mit Schrittweite $h = 1/N$. Testen Sie das Verfahren für $\lambda_1 = -1$ und verschiedene Werte von N und λ_2. Was passiert, wenn $\lambda_2 < -N$?