Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik – Professur Wissenschaftliches Rechnen
Prof. Dr. Martin Stoll, Dominik Alfke

Sommersemester 2018

Einführung in die Numerik – Aufgabenblatt 8.

Problem 1 **(Hausaufgabe, 4 Punkte)**

Für die Gauß-Legendre-Quadratur mit Gewichtsfunktion $w(x) = 1$ werden die sogesannten Legendre-Polynome $p_k \in \Pi_k$ benutzt. Diese sind für $k \in \mathbb{N}_0$ definiert durch die Rodrigues-Formel

$$p_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \cdot \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} \left[(x^2-1)^k \right].$$

Zeigen Sie, dass dies orthogonale Polynome bezüglich des ungewichteten $\mathcal{L}_2$-Skalarprodukts auf $[-1, 1]$ sind, d.h. dass für alle $k \in \mathbb{N}$, $q \in \Pi_{k-1}$ gilt

$$\int_{-1}^{1} p_k(x) q(x) \mathrm{d}x = 0.$$

(Hinweis: k-malige Anwendung von partieller Integration. Die Intervallgrenzen sind k-fache Nullstellen von $(x^2-1)^k$.)

Problem 2 **(Hausaufgabe, 4 Punkte)**

Die aus der Vorlesung bekannte Gauß-Chebyshev-Quadratur besagt

$$\int_{-1}^{1} f(x) w(x) \mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{\pi}{n+1} f(x_k)$$

mit den Chebyshev-Punkten $x_k = \cos\left(\frac{k+1/2}{n+1}\pi\right)$ und der Gewichtsfunktion $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
Leiten Sie daraus ein Verfahren zur numerischen Berechnung von

$$\int_a^b g(t) \mathrm{d}t$$

her, indem Sie mit $t = \varphi(x)$ substituieren, wobei φ das Intervall $[-1, 1]$ affin linear auf $[a, b]$ abbildet, und anschließend die Gewichtsfunktion ausgleichen. Implementieren Sie dieses Verfahren in einer Matlab-Funktion

```
function I = gaussChebyshev(g, a, b, n)
```

wobei `g` als *function handle* übergeben wird. Das heißt, dass Sie innerhalb von `gaussChebyshev` die Funktion g ganz normal über `g(t)` auswerten können, wobei `t` ein Skalar oder auch ein Vektor für elementweise Auswertung sein darf. Sie können Ihren Code zum Beispiel mit `g = @(t) exp(t);` testen.

Zur Lösung von Fixpunktgleichungen der Form $F(x) = x$ für $x \in \mathbb{R}^n$ betrachten wir die einfache Fixpunktiteration

$$x^0 \in \mathbb{R}, \qquad x^{k+1} = F(x^k).$$

Zur Lösung von Nullstellengleichungen der Form $f(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^n$ betrachten wir das Newton-Verfahren

$$x^0 \in \mathbb{R}, \qquad x^{k+1} = x^k - (\nabla f(x^k))^{-1} f(x^k),$$

wobei $\nabla f(x)$ die Jacobi-Matrix von $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bezeichne.

Problem 3

Bestimmen Sie die Lösung $x \in [0, 1]$ der Gleichung

$$f(x) = x^3 - 7x + 2 = 0$$

mit den folgenden Methoden:

- Die Fixpunktiteration nach Umschreiben der Gleichung in eine Fixpunktgleichung auf zwei verschiedene Arten
- Das Newtonverfahren mit analytisch berechneter Ableitung $f'(x)$
- Das Sekantenverfahren, das aus dem Newtonverfahren entsteht, indem man die Ableitung $f'(x^k)$ in der aktuellen Iterierten durch die Annäherung

  $$f'(x^k) \approx \frac{f(x^k) - f(x^{k-1})}{x^k - x^{k-1}}$$

  mit der vorherigen Iterierten x^{k-1} ersetzt.

Implementieren Sie diese Verfahren und vergleichen Sie ihr Konvergenzverhalten für $x^0 = 0.1$ und für $x^0 = 0.7$.

Problem 4

Das LORAN-System (LOng RAnge Navigation) berechnet die Position eines Bootes auf See, indem es Signale von fixierten Sendern benutzt. Aus der Zeitdifferenz der eingehenden Signale kann das Boot den Abstand zu den Sendern bestimmen. Das führt auf zwei Gleichungen, die für x und y gelöst werden müssen, z.B.

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{186^2} - \frac{y^2}{300^2 - 186^2} &= 1 \\ \frac{(y-500)^2}{279^2} - \frac{(x-300)^2}{500^2 - 279^2} &= 1 \end{aligned}$$

Schreiben Sie dies als $f(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^2$. Implementieren Sie das Newtonverfahren für diese Gleichungen und testen Sie es für verschiedene Startvektoren. Geben Sie zwei Startvektoren an, für die Sie unterschiedliche Nullstellen erhalten.