Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik – Professur Wissenschaftliches Rechnen
Prof. Dr. Martin Stoll, Dominik Alfke

Sommersemester 2018

Einführung in die Numerik – Aufgabenblatt 6.

Problem 1 **(Hausaufgabe, 4 Punkte)**

Testen Sie die numerischen Eigenschaften der Vandermonde-Matrix

$$G_n = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

mit n äquidistanten Stützstellen x_i auf dem Intervall $[0,1]$ für verschiedene n zwischen 10 und 100. Schreiben Sie dazu ein Skript, dass mit einem festen Wert `n` die folgenden Schritte durchführt:

- Stellen Sie die Matrix mit `vander(x)` für `x=linspace(0,1,n)` auf. (Beachten Sie `help vander`, um zu sehen, wie sich die so aufgestelle Matrix von der hier verwendeten Definition unterscheidet.)
- Geben Sie eine Approximation an die Konditionszahl der Matrix durch `condest` aus, zum Beispiel mit `disp`.
- Stellen Sie den Spaltenvektor mit den Funktionswerten von $f(x) = \sin(10x)$ in den Stützstellen `x` auf.
- Lösen Sie das Vandermonde-System, um den Vektor mit den Polynomkoeffizienten für die Interpolation von f zu erhalten.
- Verwenden Sie `polyval`, um das Interpolationspolynom in den Stützstellen auszuwerten. Geben Sie die maximale absolute Abweichung

  $$\max_{i=1,\ldots,n} |f(x_i) - p(x_i)|$$

  zwischen dem Interpolationspolynom p und der Originalfunktion f in einer Stützstelle `x` aus.
- Wiederholen Sie den vorherigen Schritt für den maximalen Fehler auf einem feineren Auswertungsgitter, erstellt durch `xEval = linspace(0,1,1000)`.

Beschreiben Sie, wie sich die Kondition und die beiden Fehlergrößen für $n \in \{10, 25, 100\}$ verhalten. Zu welchem Teil sind die Fehler auch in exakter Arithmetik zu erwarten und zu welchem Teil werden sie durch numerische Probleme verursacht?

Problem 2 **(Hausaufgabe, 4 Punkte)**

Wir betrachten den natürlichen kubischen Spline S zur Interpolation einer Funktion f auf dem Intervall $[a, b]$. Wir definieren

- äquidistante Stützstellen $x_k = a + kh$ für $k = 0, \ldots, n$ mit $h = \frac{b-a}{n}$, d.h.

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = b,$$

- die Interpolationsdaten $y_k := f(x_k)$,
- $m_k := S''(x_k)$ für die zweite Ableitung des Splines in der k-ten Stützstellen $(k = 0, \ldots, n)$,
- die Teilintervalle $I_k := [x_{k-1},\ x_k]$ von $[a, b]$ $(k = 1, \ldots, n)$,
- die Bezeichung $S_{|I_k}$ für die Einschränkungen von S auf I_k.

Da $S_{|I_k}$ ein Polynom dritten Grades ist, ist $S''_{|I_k}$ (affin) linear und damit durch die Werte in den Endpunkten des Intervalls, m_{k-1} und m_k, eindeutig bestimmt. Zeigen Sie darauf aufbauend, dass S auf I_k gegeben ist durch

$$S_{|I_k}(x) = \frac{(x_k - x)^3 m_{k-1} + (x - x_{k-1})^3 m_k}{6h} \; + \; C_k(x - x_{k-1}) \; + \; D_k(x_k - x) \qquad \forall\, x \in I_k$$

mit Konstanten C_k und D_k. Nutzen Sie nun die Interpolationseigenschaften $S_{|I_k}(x_{k-1}) = y_{k-1}$ und $S_{|I_k}(x_k) = y_k$, um Werte für die Konstanten C_k und D_k zu finden.

Problem 3

Nutzen Sie den in Problem 2 erhaltenen Ausdruck und leiten Sie zusammen mit der Differenzierbarkeitseigenschaft

$$S'_{|I_k}(x_k) = S'_{|I_{k+1}}(x_k) \quad \forall\, k = 1, \ldots, n-1$$

daraus das folgende Gleichungssystem her:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & 1 & 4 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} y_0 - 2y_1 + y_2 \\ y_1 - 2y_2 + y_3 \\ \vdots \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \end{bmatrix}$$

Welche Werte benutzen Sie für m_0 und m_n?

Problem 4

Wenn man für einen festen Parameterbereich $t \in [0, T]$ zwei Spline-Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ definiert, erhält man eine zweidimensionale parametrisierte Spline-Kurve.
Informieren Sie sich über die Matlab-Funktion `spline` und nutzen Sie sie, um eine solche Kurve durch folgenden Datenpunkte zu plotten.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x	3	1.75	0.9	0	0.5	1.5	3.25	4.25	4.25	3	3.75	6.00
y	4	1.60	0.5	0	1.0	0.5	0.50	2.25	4.00	4	3.25	4.25