Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik – Professur Wissenschaftliches Rechnen
Prof. Dr. Martin Stoll, Dominik Alfke Sommersemester 2018

Einführung in die Numerik – Aufgabenblatt 5.

Problem 1 **(Hausaufgabe, 4 Punkte)**

Schreiben Sie eine Funktion

```
function p = lagrange(x, y)
```

die anhand eines gegebenen Stützstellenvektors `x` und den dazugehörigen Daten `y` die Koeffizienten des Lagrange-Interpolationspolynoms berechnet, sodass `polyval(p, x)== y`.
Betrachten Sie nun die folgende Tabelle der sächsischen Geburtsstatistik:

Jahr	Geburten	Jahr	Geburten	Jahr	Geburten
1990	49 774	1999	31 383	2008	34 411
1991	31 341	2000	33 139	2009	34 093
1992	25 298	2001	31 943	2010	35 091
1993	23 423	2002	31 518	2011	34 423
1994	22 734	2003	32 079	2012	34 686
1995	24 004	2004	33 044	2013	34 800
1996	27 006	2005	32 581	2014	35 935
1997	29 008	2006	32 556	2015	36 466
1998	30 190	2007	33 858	2016	37 941

Interpolieren Sie die Geburtenzahl in jedem dritten Jahr, also der Jahre 1990,1993,1996,...,2014. Wählen Sie dazu `x` als den $\mathbb{R}^9$-Vektor dieser Jahreszahlen minus 1989 und `y` als den Vektor der dazugehörigen Daten. Werten Sie das von `lagrange` erhaltene Polynom aus, um eine Schätzung für die Geburtenzahlen in den Jahren 2012 und 2016 zu erhalten. Wie gut eignet sich das Interpolationspolynom für die Approximation der tatsächlichen Daten?

Problem 2 **(Hausaufgabe, 4 Punkte)**

Wir betrachten die sogenannten Chebyshev-Polynome

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)) \quad \forall x \in [-1, 1]$$

für $n = 0, 1, 2, \ldots$

- Zeigen Sie, dass für alle $n = 1, 2, \ldots$ gilt

  $$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad \forall x \in [-1, 1].$$

  (Hinweis: Benutzen Sie die Additionstheoreme zur Darstellung von $T_{n+1}(x)$ und $T_{n-1}(x)$. durch $T_n(x)$.)

- Zeigen Sie, dass T_n ein Polynom vom Grad n ist.

- Zeigen Sie, dass für festes n die Chebyshev-Punkte

  $$x_k = \cos\left(\frac{k + 1/2}{n+1}\pi\right) \quad (k = 0, \ldots, n)$$

  Nullstellen von T_{n+1} sind.

Problem 3

Benutzen Sie Ihre Funktion `lagrange` aus Problem 2 für die Interpolation der Runge-Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

mit $n+1$ äquidistanten Stützstellen im Intervall $[-1, 1]$ für verschiedene Werte für den Polynomgrad n. Plotten Sie die Originalfunktion und das Interpolationspolynom. Was beobachten Sie an den Intervallenden?
Verwenden Sie danach die Chebyshev-Punkte aus Problem 2 als Stützstellen für die Interpolation. Was sehen Sie?

Problem 4

Implementieren Sie das CG-Verfahren mit Präkonditionierer und testen Sie es anhand der Matrix `A=gallery('poisson',p)` für verschieden `p` mit zufälliger rechter Seite. Für den Präkonditionierer M wählt man eine Matrix, sodass $M^{-1}y$ eine Annäherung an $A^{-1}y$ gibt, die aber viel leichter zu berechnen ist. Vergleichen Sie die folgenden Präkonditionierer:

- $M = I$ (ohne Präkonditionierer),
- $M = \text{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$ (wie beim Jacobi-Verfahren),
- $M^{-1}y = x$ als approximative Lösung von $Ax = y$, berechnet durch fünf Schritte des Jacobi-Verfahrens mit Startvektor $x^0 = 0$.