Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik – Professur Wissenschaftliches Rechnen
Prof. Dr. Martin Stoll, Dominik Alfke

Sommersemester 2018

Einführung in die Numerik – Aufgabenblatt 3.

Problem 1

Zeigen Sie, dass eine Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ faktorisierbar als $A = LU$ (wie in der Vorlesung) ist, wenn alle Hauptunterdeterminanten ungleich Null sind, d.h.

$$\det(A_k) \neq 0 \qquad \text{mit} \qquad A_k := (a_{i,j})_{i,j=1}^k \in \mathbb{R}^{k\times k} \qquad \forall k = 1, \ldots, n.$$

(Hinweis: Benutzen Sie Induktion und gehen Sie von $A_k = L_k U_k$ aus.)

Problem 2 **(Hausaufgabe, 4 Punkte)**

(a) Schreiben Sie eine Matlab-Funktion

```
function yEval = polynomialLeastSquares(x, y, degree, xEval)
```

die für gegebene Datenpaare (`x(i)`, `y(i)`) das Polynom vom Grad `degree` findet, dessen Graph die Datenpaare im Least-Squares-Sinne bestmöglichst approximiert. Dieses Polynom soll dann in den im Vektor `xEval` gespeicherten Stützstellen ausgewertet werden und der Vektor `yEval` mit den berechneten Funktionswerten soll zurückgegeben werden.

(b) Gegeben sind die Datenpaare

$$(1, 4), \quad (2, 7), \quad (4, 5), \quad (5, 1), \quad (6, 0).$$

Erstellen Sie eine Grafik, die diese Datenpunkte visualisiert. Erweitern Sie diese Grafik dann sukzessive um Plots der Ausgleichspolynome vom Grad $k \in \{1, \ldots, 4\}$, ausgewertet auf 1000 äquidistanten Punkten im Intervall $[0, 7]$, erstellt durch Ihren Code aus (a). Fügen Sie eine Legende hinzu, die deutlich macht, welche Kurve zu welchem Polynomgrad gehört.

Reichen Sie wie gewohnt den Funktions-Code aus (a) sowie den Code zur Ploterzeugung aus (b) ausgedruckt und per Email ein. Die erstellte Grafik müssen Sie nicht ausdrucken, aber bitte als PNG-Datei der Email anhängen.

Problem 3

(a) Führen Sie die Gauss'sche Elimination mit partieller Pivotisierung per Hand durch am Beispiel von

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}.$$

Schreiben Sie die Zerlegung $PA = LU$ auf. Verifizieren Sie Ihr Ergebnis mittels MATLABs `lu`-Befehl.

(b) Implementieren Sie die LU-Zerlegung durch Gauss'sche Elimination ohne Pivotisierung und benutzen Sie diese, um das Gleichungssystem $A_1 x = b_1$ mit der rechten Seite `b1=sum(A1,2)` zu lösen. Vergleichen Sie die Zerlegung und das Residuum `norm(b1-A1*x)` mit den Ergebnissen von MATLABs `lu`-Befehl.

(c) Wiederholen Sie den Vergleich für die Matrix

$$A_2 = \begin{bmatrix} 10^{-6} & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

und die rechte Seite `b2=sum(A2,2)`. An welcher Stelle entsteht das Problem?

Problem 4

Es sei eine symmetrische Sattelpunktsmatrix

$$\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}$$

mit invertierbarem $A = A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gegeben. Zeigen Sie, dass gilt

$$\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ BA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A^{-1}B^T \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

mit $S = BA^{-1}B^T$, dem sogenannten Schurkomplement. Nach dem Trägheitssatz von Sylvester gilt, dass kongruente Matrizen die gleiche Anzahl positiver, negativer und Null-Eigenwerte haben. Was bedeutet die Faktorisierung für die Eigenwerte der Sattelpunktsmatrix? Geben Sie basierend auf dieser Zerlegung eine explizite Form der inversen Sattelpunktsmatrix an.

Problem 5 **(Hausaufgabe, 4 Punkte)**

Sei $A \in \mathbb{R}^n$ eine strikt Spalten-diagonaldominante Matrix, d.h.

$$|a_{jj}| > \sum_{i=1,\ i\neq j}^{n} |a_{ij}| \quad \forall j = 1,\dots,n.$$

Zeigen Sie, dass die Gauss'sche Elimination mit partieller Pivotisierung keine Zeilenvertauschungen durchführen muss.
(Hinweis: Induktion über n. Im Induktionsschritt nutzen Sie, dass nach der ersten Iteration die folgenden Schritte der Gauss'schen Elimination äquivalent zur Anwendung der Gauss'schen Elimination auf eine kleinere Matrix $B \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ ist. Zeigen Sie, dass B wieder strikt Spalten-diagonaldominant ist.)