Wir wollen die Theorie im Folgenden auch für holomorphe Funktionen entwickeln. Wir wiederholen zunächst einige Tatsachen aus der Funktionentheorie. Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen, und $f: U \to \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ eine $\mathcal{C}^\infty$-Abbildung, d.h., f ist beliebig oft differenzierbar, wenn wir U als Teilmenge von $\mathbb{R}^{2n}$ auffassen.

<u>Definition 2.7:</u> a) f heißt komplex differenzierbar in einem Punkt $a \in U$, falls $\forall\, h \in \mathbb{C}^n$, $\|h\|$ klein gilt, daß $f(a+h) = f(a) + A \cdot h + r$ ist, mit $A \in \mathrm{Mat}(1 \times n, \mathbb{C})$, $r \in \mathbb{C}$ und $\lim\limits_{\|h\| \to 0} \frac{|r|}{\|h\|} = 0$

Dann ist $A = Df(a) = (\partial_{z_1} f \;\ldots\; \partial_{z_n} f)$

die komplexe Ableitung von f in a

b) f heißt holomorph in $U \subset \mathbb{C}^n$, falls f kplx. d'bar $\forall a \in U$ ist. Wir setzen

$$\mathcal{O}(U) := \{ f : U \to \mathbb{C} \mid f \text{ holomorph in } U \}$$

Wir haben wieder die Restriktionsabbildungen $\rho^U_V : \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(V)$ für alle offenen Teilmengen $V \subset U$ sowie die Keime:

$$\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, p} := \mathcal{O}_p := \{ [f]_p \mid f \in \mathcal{O}(U) \text{ für } U \text{ offene Umg. von } p \}$$

mit maximalem Ideal $m_p := \{ [f]_p \mid f(p) = 0 \} \subset \mathcal{O}_p$

(Notation: Manchmal auch $\mathcal{O}_n := \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$, analog $\mathcal{E}_n := \mathcal{E}_{\mathbb{R}^n, 0}$)

Satz 2.8. (Cauchy-Integralformel):

Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen, $f \in \mathcal{O}(U)$, $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$, $\rho_i \in \mathbb{R}_{>0}$

$\forall i \in \{1, \dots n\}$, dann heißt $P(a, \rho) := \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_i - a_i| < \rho_i\}$

offener Polyzylinder mit Multiradius $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n)$.

Es ist dann

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{|\zeta_1 - z_1| = \rho_1} \dots \int\limits_{|\zeta_n - z_n| = \rho_n} \frac{f(\zeta_1, \dots \zeta_n)}{(\zeta_1 - z_1) \cdot \dots \cdot (\zeta_n - z_n)} \, d\zeta_1 \dots d\zeta_n$$

Entwickle $\dfrac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_n - z_n)}$ nach z_i, vertausche Summe mit Integral $\Rightarrow$ f läßt sich in kleiner Umgebung von z in konvergente Potenzreihe entwickeln.

Wir wollen Potenzreihenentwicklung von holomorphen und von C^∞-Funktionen genauer studieren.

<u>Definition 2.9.</u>: Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und

$$\mathbb{K}[[x_1, \dots, x_n]] := \left\{ \sum_{\underline{\nu} \in \mathbb{N}^n} a_{\underline{\nu}} \cdot x^{\underline{\nu}} \,\middle|\, a_{\underline{\nu}} \in \mathbb{K} \right\}$$ die Menge der

formalen Potenzreihen in n Variablen.

<u>Lemma 2.10.</u>: $\mathbb{K}[[x_1, \dots, x_n]]$ ist eine $\mathbb{K}$-Algebra

und $$\mathfrak{m} := \left\{ \sum_{\underline{\nu} \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\}} a_{\underline{\nu}} \cdot x^{\underline{\nu}} \,\middle|\, a_{\underline{\nu}} \in \mathbb{K} \right\} \subset \mathbb{K}[[x_1, \dots, x_n]]$$

ist ein maximales Ideal.

<u>Beweis</u>: Übung, bemerke, daß $+, \cdot$ und Skalarmultiplikation mit $c \in \mathbb{K}$ folgendermaßen definiert sind:

- $$\sum_{\underline{\nu} \in \mathbb{N}^n} a_{\underline{\nu}} x^{\underline{\nu}} + \sum_{\underline{\nu} \in \mathbb{N}^n} b_{\underline{\nu}} x^{\underline{\nu}} = \sum_{\underline{\nu} \in \mathbb{N}^n} (a_{\underline{\nu}} + b_{\underline{\nu}}) x^{\underline{\nu}}$$
- $$\left(\sum_{\underline{\lambda} \in \mathbb{N}^n} a_{\underline{\lambda}} \cdot x^{\underline{\lambda}} \right) \cdot \left(\sum_{\underline{\kappa} \in \mathbb{N}^n} b_{\underline{\kappa}} x^{\underline{\kappa}} \right) = \sum_{\underline{\nu} \in \mathbb{N}^n} \left(\sum_{\underline{\lambda} + \underline{\kappa} = \underline{\nu}} a_{\underline{\lambda}} \cdot b_{\underline{\kappa}} \right) x^{\underline{\nu}}$$
- $$c \cdot \sum_{\underline{\nu} \in \mathbb{N}^n} a_{\underline{\nu}} x^{\underline{\nu}} = \sum_{\underline{\nu} \in \mathbb{N}^n} (c \cdot a_{\underline{\nu}}) x^{\underline{\nu}}$$

Wir können nun genauer Taylorentwicklungen von glatten und holomorphen Funktionen studieren.

<u>Def + Satz 2.11:</u> Sei $R := \begin{cases} \mathcal{E}_{\mathbb{R}^n,0} \\ \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0} \end{cases}$ (d.h. R ist $\mathbb{K}$-Algebra), dann heißt

$$T : R \longrightarrow \mathbb{K}[[x_1, \dots, x_n]]$$

$$f \longmapsto \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} a_\nu \cdot x^\nu \quad \text{mit} \quad a_\nu := \frac{1}{\nu!} \left(\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} f \right)(0)$$

die Taylorabbildung. T ist $\mathbb{K}$-Algebrenhomomorphismus

$T: \mathcal{O}_n \to \mathbb{C}[[x]]$ injektiv, aber nicht surjektiv

$T: \mathcal{E}_n \to \mathbb{R}[[x]]$ surjektiv, aber nicht injektiv

<u>Beweis:</u> 1.) Wohldefiniertheit

Seien f, g mit $[f] = [g]$ gegeben, dann

$\exists\, U \subset \mathbb{K}^n$ offen, $0 \in U$ mit $f_{|U} = g_{|U}$

$$D^\nu f_{|U} = D^\nu g_{|U} \Rightarrow (D^\nu f)(0) = (D^\nu g)(0) \Rightarrow T([f]) = T([g])$$

2.) Homomorphismus:

klar: $T([f]+[g]) = T([f+g]) = \sum \frac{D^\nu(f+g)(0)}{\nu!} x^\nu$

$$= \sum \frac{D^\nu(f)(0) + D^\nu(g)(0)}{\nu!} x^\nu = T([f]) + T([g])$$

auch klar: $\forall c \in \mathbb{K}$ ist $c \cdot T([f]) = T([c \cdot f]) = T(c[f])$

Aufgabe (Übung): $T([f]\cdot[g]) = T([f]\cdot[g])$

Benutze hierzu die Leibniz-Formel

$$D^\nu(f\cdot g) = \sum_{\kappa+\lambda=\nu} \binom{\nu}{\lambda} D^\kappa(f)\cdot D^\lambda(g)$$

mit $\binom{\nu}{\lambda} = \frac{\nu!}{\lambda!\cdot(\nu-\lambda)!}$

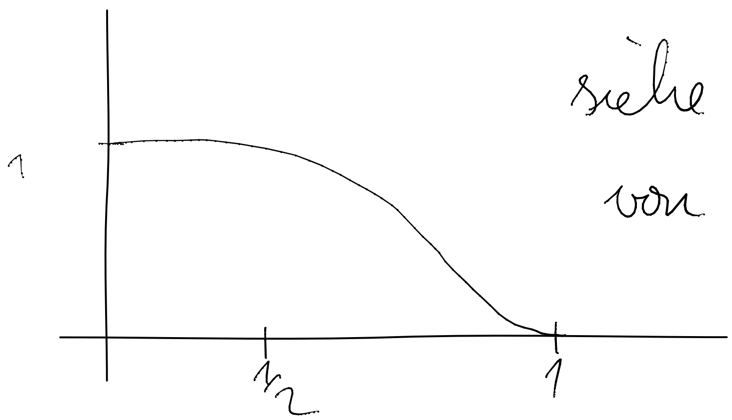
3.) $T: \mathcal{O}_n \to \mathbb{C}[[x]]$ injektiv: klar: Die Taylorreihe einer hol. Funktion ist konvergent (in kleiner Umgebung von 0), also kann man f aus T(f) durch Einsetzen zurückgewinnen. Andererseits ist $T: \mathcal{O}_n \to \mathbb{C}[[x]]$ nicht surjektiv, denn z.B. $\sum_{n\geq 0} n!\, x^n$ ist divergent und nicht Taylorreihe eines $f \in \mathcal{O}_n$

3.) $T: \mathcal{E}_n \to \mathbb{R}[\![x]\!]$ surjektiv, zu zeigen: $\forall (a_{\underline{\nu}})_{\underline{\nu}\in\mathbb{N}^n}$

$\exists f \in \mathcal{E}$ mit $T(f) = \sum_{\underline{\nu}\in\mathbb{N}^n} \frac{1}{\underline{\nu}!} a_{\underline{\nu}} \cdot x^{\underline{\nu}}$,

Definiere $u: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \forall x : |x| \geq 1 \\ \left(1 + e^{\frac{1}{\frac{1}{2} - |x|} + \frac{1}{1-|x|}}\right)^{-1} & \forall x : \frac{1}{2} < |x| < 1 \\ 1 & \forall x : |x| \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$



siehe auch Beweis von Lemma 2.6.

sowie $\forall \underline{\nu} \in \mathbb{N}^n$: $b_{\underline{\nu}} := \begin{cases} \frac{1}{2 \cdot |a_{\underline{\nu}}|} & \forall |a_{\underline{\nu}}| > 1 \\ \frac{1}{2} & \forall |a_{\underline{\nu}}| < 1 \end{cases} \Rightarrow |a_{\underline{\nu}}| b_{\underline{\nu}} \leq \frac{1}{2}$

und $g_{\underline{\nu}}(x) = \frac{1}{\underline{\nu}!} \cdot a_{\underline{\nu}} \cdot u\left(\frac{x}{b_{\underline{\nu}}}\right) \cdot x^{\underline{\nu}}$; $f(x) = \sum_{\underline{\nu}\in\mathbb{N}^n} g_{\underline{\nu}}(x)$.

zu zeigen: 1.) $[f] \in \mathcal{E}$. 2.) $(D^{\underline{\lambda}} f)(0) = a_{\underline{\lambda}}$

Zeige zunächst: $\sum_{\underline{\nu}} D^{\underline{\lambda}} g_{\underline{\nu}}(x)$ konvergieren gleichmäßig auf $\mathbb{R}^n$, insbesondere gilt dies dann für $\lambda = 0$, d.h., für $\sum_{\underline{\nu} \in \mathbb{N}^n} g_{\underline{\nu}}(x) = f$.

Wir haben $\forall \underline{\lambda} < \underline{\nu}$ (d.h. $\underline{\lambda} \in \mathbb{N}^n$ s.d. $\lambda_i < \nu_i \; \forall i \in \{1..n\}$)

$$\left| D^{\underline{\lambda}} g_{\underline{\nu}}(x) \right| = \frac{1}{\underline{\nu}!} |a_{\underline{\nu}}| \cdot \left| D^{\underline{\lambda}} \left(u\left(\frac{x}{b_{\underline{\nu}}}\right) \cdot x^{\underline{\nu}} \right) \right|$$

$$= \frac{1}{\underline{\nu}!} |a_{\underline{\nu}}| \cdot \left| \sum_{0 \le \underline{\kappa} \le \underline{\lambda}} \binom{\underline{\lambda}}{\underline{\kappa}} \cdot D^{\underline{\lambda} - \underline{\kappa}} u\left(\frac{x}{b_{\underline{\nu}}}\right) \cdot \frac{\underline{\nu}!}{(\underline{\nu} - \underline{\kappa})!} x^{\underline{\nu} - \underline{\kappa}} \right|$$

Per Induktion kann man zeigen.

$$D^{\underline{\lambda} - \underline{\kappa}} u\left(\frac{x}{b_{\underline{\nu}}}\right) = \left(D^{\underline{\lambda} - \underline{\kappa}} u\right)\left(\frac{x}{b_{\underline{\nu}}}\right) \cdot \frac{1}{b_{\underline{\nu}}^{|\underline{\lambda} - \underline{\kappa}|}} \quad (*)$$

außerdem ist $|x^{\underline{\nu} - \underline{\kappa}}| = \left| \prod_{i=1}^n x_i^{\nu_i - \kappa_i} \right| = \prod_{i=1}^n |x_i|^{\nu_i - \kappa_i}$

$$\overset{|x_i| \le |x| = (\sum x_i^2)^{\frac{1}{2}}}{\le} \prod_{i=1}^n |x|^{\nu_i - \kappa_i} = |x|^{\sum_i \nu_i - \kappa_i} = |x|^{|\underline{\nu} - \underline{\kappa}|} \quad (**)$$

Da nach Definition $u\left(\frac{x}{b_\nu}\right)=0 \ \forall |x|\ge b_\nu$,

folgt $D^{\lambda-\kappa} u\left(\frac{x}{b_\nu}\right)=0 \ \forall |x|\ge b_\nu$, also kann

man $|x|^{|\nu-\kappa|} \underset{(***)}{\le} |b_\nu|^{|\nu-\kappa|}$ annehmen.

Setze $K_\lambda = \max\limits_{\nu,x}\left\{ |D^{\vartheta} u(x)| \mid 0\le \vartheta \le \lambda,\ x\in\mathbb{R}^n \right\}$, bemerke,

daß K_λ existiert, weil $u(x)=0 \ \forall |x|\ge 1$ gilt.

Also haben wir insgesamt: $\forall \nu \ge \lambda$ $\left|\left(D^\lambda g_\nu\right)(x)\right| =$

$$= \frac{1}{\nu!}|a_\nu|\cdot\left|\sum_{0\le\kappa\le\lambda}\binom{\lambda}{\kappa}\cdot \underbrace{D^{\lambda-\kappa}u\left(\frac{x}{b_\nu}\right)}_{(*)}\cdot\frac{\nu!}{(\nu-\kappa)!}\underbrace{x^{\nu-\kappa}}_{(**)+(***)}\right|$$

$$\le |a_\nu|\cdot\lambda!\cdot K_\lambda\cdot\sum_{0\le\kappa\le\lambda}\frac{1}{b_\nu}^{|\lambda-\kappa|}\cdot b_\nu^{|\nu-\kappa|}$$

$$\frac{1}{\kappa!\,(\lambda-\kappa)!\,(\nu-\kappa)!}\le 1$$

$$= |a_\nu|\cdot\lambda!\cdot K_\lambda\cdot\sum_{0\le\kappa\le\lambda} b_\nu^{|\nu-\lambda|}$$

Erinnerung: $b_\nu := \begin{cases}\frac{1}{2\cdot|a_\nu|} & \forall |a_\nu|>1\\ \frac12 & \forall |a_\nu|<1\end{cases}$ d.h. $|a_\nu|\cdot b_\nu\le\frac12$

und:

$$|D^{\underline{\lambda}} g_{\underline{\nu}}(x)| \leq |a_{\underline{\nu}}| \cdot b_{\underline{\nu}} \cdot \lambda! \cdot K_{\underline{\lambda}} \cdot \sum_{0 \leq \underline{\kappa} \leq \underline{\lambda}} b_{\underline{\nu}}^{|\underline{\nu}-\underline{\lambda}|-1}$$

<u>Bemerke</u>: $b_{\underline{\nu}}^{|\underline{\nu}-\underline{\lambda}|-1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{|\underline{\nu}-\underline{\lambda}|-1} = 2^{|\underline{\lambda}|+1} \cdot 2^{-|\underline{\nu}|}$, also für $\underline{\nu} > \underline{\lambda}$

$$D^{\underline{\lambda}} g_{\underline{\nu}}(x) \leq \underbrace{\left(\lambda! \cdot K_{\underline{\lambda}} \cdot \sum_{0 \leq \underline{\kappa} \leq \underline{\lambda}} 2^{|\underline{\lambda}|+1}\right)}_{\overset{!!}{C_{\underline{\lambda}}}} \cdot 2^{-|\underline{\nu}|} \leq C_{\underline{\lambda}} \cdot 2^{-|\underline{\nu}|}$$

<u>Bemerke</u>: $2^{-|\underline{\nu}|} = 2^{-\sum_i \nu_i} = \prod_{i=1}^{n} 2^{-\nu_i}$

$$\Rightarrow \sum_{\underline{\nu} \in \mathbb{N}^n} 2^{-|\underline{\nu}|} = \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\right)^n$$

$$= 2^n \qquad \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = \sum_k \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2\right)$$

Es reicht, die gleichmäßige Konvergenz von $\sum_{\underline{\nu} \geq \underline{\lambda}} D^{\underline{\lambda}} g_{\underline{\nu}}(x)$ zu zeigen, und hier gilt: $\sum_{\underline{\nu} \geq \underline{\lambda}} \left| D^{\underline{\lambda}} g_{\underline{\nu}}(x) \right| \leq \sum_{\nu \geq \underline{\lambda}} C_{\underline{\lambda}} \cdot 2^{-|\underline{\nu}|} \leq C_{\underline{\lambda}} \cdot 2^n < \infty$

also konvergiert auch $\sum_{\underline{\nu} \in \mathbb{N}^n} D^{\underline{\lambda}} g_{\underline{\nu}}(x)$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}^n$, insbesondere ($\underline{\lambda} = 0$) gilt dies für f, und dann ist $D^{\underline{\lambda}} f(x) = \sum_{\underline{\nu} \in \mathbb{N}^n} D^{\underline{\lambda}} g_{\underline{\nu}}(x)$, siehe unten.

Wegen $D^{\underline{\lambda}} u(0) = 0 \quad \forall \underline{\lambda} \in \mathbb{N}^n \setminus \{\underline{0}\}$ gilt

$$D^{\underline{\lambda}} g_{\underline{\nu}}(0) = \frac{1}{\underline{\nu}!} a_{\underline{\nu}} \cdot \sum_{0 \leq \underline{\kappa} \leq \underline{\lambda}} \underbrace{\binom{\underline{\lambda}}{\underline{\kappa}} D^{\underline{\lambda} - \underline{\kappa}} u(0) \cdot \frac{\underline{\nu}!}{(\underline{\nu} - \underline{\kappa})!} x^{\underline{\nu} - \underline{\kappa}}(0)}_{= \begin{cases} 0 & \forall \underline{\lambda} \neq \underline{\kappa} \\ 0 & \forall \underline{\kappa} \neq \underline{\nu} \end{cases}}$$

$$\Rightarrow D^{\underline{\lambda}} g_{\underline{\nu}}(0) = \begin{cases} 0 & \forall \underline{\lambda} \neq \underline{\nu} \\ a_{\underline{\nu}} & \underline{\lambda} = \underline{\nu} \end{cases}$$

Also: $T(f)(x) = \sum_{\underline{\lambda} \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{\underline{\lambda}!} D^{\underline{\lambda}} f(0) x^{\underline{\lambda}}$

$$= \sum_{\underline{\lambda}} \frac{1}{\underline{\lambda}!} \left(D^{\underline{\lambda}} \sum_{\underline{\nu}} g_{\underline{\nu}} \right)(0) x^{\underline{\lambda}} = \sum_{\underline{\nu} \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{\underline{\nu}!} \left(D^{\underline{\nu}} g_{\underline{\nu}} \right)(0) x^{\underline{\nu}}$$

$$= \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{\underline{\nu}!} a_{\underline{\nu}} \cdot x^{\underline{\nu}}$$

Nachtrag: bekannt aus Analysis:

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\forall k \in \mathbb{N}: g_k \in C^1(U)$. Sei $a \in U$, s.d. $g_k(a) \xrightarrow{k \to \infty} c < \infty$ und so daß $\forall x \in U$: $\exists \varepsilon > 0$: (Dg_k) ist auf $B_\varepsilon(x) \subset U$ gleichmäßig konvergent.

Dann ist auch (g_k) auf $B_\varepsilon(x)$ gleichmäßig konvergent mit Grenzwert $g \in C^1(U)$ und

$$Dg = \lim_{k \to \infty} Dg_k .$$

<u>verwende dies mehrfach (abzählbar oft):</u>

1) $g_k := \sum_{|\nu| \leq k} g_\nu \Rightarrow \lim_{k \to \infty} g_k = f \in C^1(U)$ und

$$Df = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} Dg_\nu$$

2.) Per induktion über $l = |\alpha|$: $f \in C^l(U)$ und

$$D^\alpha f = \sum_{\nu \in \mathbb{N}} D^\alpha g_\nu$$

$\square$