13. Vorlesung
23.11.2017

Erinnerung: Wir haben Keime $f \in \mathfrak{R}_n$ mit $\mu(f) \le 5$ klassifiziert. Übung: $\mu(f) \in \{6,7\}$.

Ab $\mu \ge 8$ gibt es Familien von Keimen, bei denen für 2 verschiedene Parameter die zugehörigen Keime nicht äquivalent sind.

Beispiel: $f_c = x^3+y^3+z^3+c\cdot xyz \quad c\in\mathbb{K}$

Blatt 5, Aufgabe 2a: $\mu(f_c) = \begin{cases}\infty & c=-1\\ 8 & c\neq -1\end{cases}$

Lemma 4.14: Seien $c_1,c_2 \in \mathbb{K}\setminus\{-1\}$ und $c_1\neq c_2$

Dann ist $f_{c_1} \not\sim_R f_{c_2}$

Beweis: Verwende folgende Hilfsaussage:

Seien $p_1,p_2 \in \mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]_k \subset \mathfrak{R}_n$ und $p_1 \sim_R p_2$, dann existiert $A\in Gl(n,\mathbb{K})$ mit $\phi_A^* p_1 = p_2$. Sei nämlich

$\varphi \in \mathcal{G}_n$, $\varphi^* p_1 = p_2$, dann ist $\varphi = \varphi_1 + \varphi_{>1}$ mit

$\varphi_1 \in (\mathbb{K}[\underline{x}]_1)^{\oplus n}$, $\varphi_{>1} \in (m_{R_n}^2)^{\oplus n}$; aber dann ist

$\varphi^* p_1 = \varphi_1^* p_1 + \varphi_{>1}^* p_1$ mit $\varphi_{>1}^* p_1 \in m_{R_n}^{k+1}$, also

wegen $\varphi^* p_1 = p_2$ und $p_2 \in \mathbb{K}[\underline{x}]_k$ muß $\varphi_{>1}^* p_1 = 0$

sein, also $\varphi_{>1}^k = 0 \Rightarrow \varphi = \varphi_1 = \varphi_A$ für ein $A \in Gl(n, \mathbb{K})$

Um Lemma 4.14 zu beweisen, reicht es also aus, zu zeigen, daß $\forall A \in Gl(3, \mathbb{K})$ $\phi_A^* f_{c_1} \neq f_{c_2}$ gilt.

Sei $A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix}$, dann ist

$$\phi_A^* f_{c_1} = (\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z)^3 + (\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z)^3 + (\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z)^3$$

$$+ c_1 \cdot (\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z)(\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z)(\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z)$$

$$\stackrel{!}{=} x^3 + y^3 + z^3 + c_2 xyz \qquad (*)$$

Setze $\tilde{A} := \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_1 & \tilde{\alpha}_2 & \tilde{\alpha}_3 \\ \tilde{\beta}_1 & \tilde{\beta}_2 & \tilde{\beta}_3 \\ \tilde{\gamma}_1 & \tilde{\gamma}_2 & \tilde{\gamma}_3 \end{bmatrix}$ mit

$\tilde{\alpha}_1 := \alpha_1^2 + c_1\alpha_2\alpha_3$, $\tilde{\alpha}_2 := \alpha_2^2 + c_1\alpha_1\alpha_3$, $\tilde{\alpha}_3 := \alpha_3^2 + c_1\alpha_1\alpha_2$

analog $\tilde{\beta}_i$, $\tilde{\gamma}_i$.

Dann folgt aus (*), daß $A \cdot \tilde{A} = Id_3$ (nachrechnen). Insbesondere hat man die folgenden Gleichungen: $\forall i \in \{1,2,3\}$: $\alpha_i\tilde{\alpha}_i + \beta_i\tilde{\beta}_i + \gamma_i\tilde{\gamma}_i = 1$, also

$$\alpha_i^3 + c_1\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \beta_i^3 + c_1\beta_1\beta_2\beta_3 + \gamma_i^3 + c_1\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = 1$$

$$\Rightarrow \alpha_1^3 + \beta_1^3 + \gamma_1^3 = \alpha_2^3 + \beta_2^3 + \gamma_2^3 = \alpha_3^3 + \beta_3^3 + \gamma_3^3 = 1 - \alpha_1\alpha_2\alpha_3 - \beta_1\beta_2\beta_3 - \gamma_1\gamma_2\gamma_3$$

weitere Bedingungen: $\alpha_1\tilde{\alpha}_2 + \beta_1\tilde{\beta}_2 + \gamma_1\tilde{\gamma}_2 = 0$

$$\Leftrightarrow \alpha_1(\alpha_2^2 + c_1\alpha_1\alpha_3) + \beta_1(\beta_2^2 + c_1\beta_1\beta_3) + \gamma_1(\gamma_2^2 + c_1\gamma_1\gamma_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1\alpha_2^2 + c_1\alpha_1^2\alpha_3 + \beta_1\beta_2^2 + c_1\beta_1^2\beta_3 + \gamma_1\gamma_2^2 + c_1\gamma_1^2\gamma_2 \quad (1)$$

analog

$$\alpha_1^2\alpha_3 + c_1\alpha_2\alpha_3^2 + \beta_1^2\beta_3 + c_1\beta_2\beta_3^2 + \gamma_1^2\gamma_3 + c_1\gamma_2\gamma_3^3 = 0 \quad (2)$$

$$\alpha_2\alpha_3^2 + c_1\alpha_1\alpha_2^2 + \beta_2\beta_3^2 + c_1\beta_1\beta_2^2 + \gamma_2\gamma_3^2 + c_1\gamma_1\gamma_2^2 = 0 \quad (3)$$

Betrachte $(1) - c \cdot (2) + c^2 (3)$:

$$\alpha_1 \alpha_2^2 + c_1^3 \alpha_1 \alpha_2^2 + \beta_1 \beta_2^2 + c_1^3 \beta_1 \beta_2^2 + \gamma_1 \gamma_2^2 + c_1^3 \gamma_1 \gamma_2^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 + c_1^3)\left(\alpha_1 \alpha_2^2 + \beta_1 \beta_2^2 + \gamma_1 \gamma_2^2\right) = 0$$

$$\overset{c_1 \neq 0}{\Longleftrightarrow} \alpha_1 \alpha_2^2 + \beta_1 \beta_2^2 + \gamma_1 \gamma_2^2 = 0$$

<u>analog</u>: $\forall i, j \in \{1,2,3\},\ i \neq j: \alpha_i \alpha_j^2 + \beta_i \beta_j^2 + \gamma_i \gamma_j^2 = 0$

also mit $S = \begin{bmatrix} \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \\ \beta_1^2 & \beta_2^2 & \beta_3^2 \\ \gamma_1^2 & \gamma_2^2 & \gamma_3^2 \end{bmatrix}$ gilt, daß

$A \cdot S = \mathrm{diag}(\alpha_i^3 + \beta_i^3 + \gamma_i^3) \cdot \mathrm{Id}_3$. Nach Annahme

ist $A \in Gl(3, K) \Rightarrow \alpha_i^3 + \beta_i^3 + \gamma_i^3 =: \lambda_i \neq 0$.

Dividiere $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ durch $\lambda_i^{1/3}$ $\rightsquigarrow$ Wir können

$\lambda_i = 1$ annehmen, und dann ist $A\tilde{A} = AS = \mathrm{Id}_3$

$\Rightarrow \tilde{A} = S \Rightarrow \alpha_1^2 = \tilde{\alpha}_1 + c\, \alpha_2 \alpha_3$ etc. $\Rightarrow c = 0$

Wegen $S = A^{-1}$ gilt mit $D := \det A$, daß

$$\alpha_1^2 = \frac{1}{D} \cdot \begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \alpha_1 = D \cdot \begin{vmatrix} \beta_2^2 & \beta_3^2 \\ \gamma_2^2 & \gamma_3^2 \end{vmatrix}$$

also $\alpha_1^2 = \frac{1}{D}(\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2)$ und $\alpha_1 = D \cdot (\beta_2^2\gamma_3^2 - \gamma_2^2\beta_3^2)$

Sei $\alpha_1 \neq 0 \Rightarrow \alpha_1^2 = \alpha_1 D \cdot (\beta_2^2\gamma_3^2 - \gamma_2^2\beta_3^2) \overset{!}{=} \frac{1}{D}(\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2)$

$$\Rightarrow \frac{1}{D^2} = \alpha_1(\beta_2\gamma_3 + \beta_2\gamma_2)$$

analoge Relationen gelten für $\alpha_2, \alpha_3, \beta_i, \gamma_i$

also bekommt man für $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, daß

$\alpha_1\beta_2\gamma_3 = \alpha_2\beta_3\gamma_1 = \alpha_3\beta_1\gamma_2$ und $\alpha_1\beta_3\gamma_2 = \alpha_3\beta_2\gamma_1 = \alpha_2\beta_1\gamma_3$. Beachte, daß $D = \underline{\alpha_1\beta_2\gamma_3} + \alpha_2\beta_3\gamma_1 + \alpha_3\beta_1\gamma_2$
$\underline{- \alpha_1\beta_3\gamma_2} - \alpha_2\beta_1\gamma_3 - \alpha_3\beta_2\gamma_1$ ist, dann folgt

$$D = 3\alpha_1\beta_2\gamma_3 - 3\alpha_1\beta_3\gamma_2$$

$$= 3\alpha_1(\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2) = 3\alpha_1 D \cdot \alpha_1^2$$

$\Rightarrow 1 = 3\alpha_1^3 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{3^{1/3}}$. Wegen Symmetrie ist dann $\alpha_i = \beta_i = \gamma_i = 1/3^{1/3}$ $\forall i$ $\lightning$ $D = \det A \neq 0$

Also ist ein Eintrag von A gleich 0, sei oBdA $\underline{\alpha_1 = 0}$, aber dann kann man auch oBdA $\beta_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$ annehmen. Sei nun $\gamma_2 \neq 0$, dann folgt aus den obigen Gleichungen, daß $1/D^2 = \alpha_3\beta_1\gamma_2$ und

$\frac{1}{D^2} = \beta_1(\alpha_2\gamma_3 + \alpha_3\gamma_2) \Rightarrow \beta_1\alpha_2\gamma_3 = 0 \Rightarrow \gamma_3 = 0$

Aber es gilt auch $\gamma_3^2 = -\frac{1}{D}\alpha_2\beta_1$ $\lightning$ $\Rightarrow \underline{\gamma_2 = 0}$

Analog: $\underline{\beta_3 = 0}$. Wegen $0 = \gamma_2^2 = \frac{1}{D}\alpha_3\beta_1 \Rightarrow \underline{\alpha_3 = 0}$

und $0 = \beta_3^2 = \frac{1}{D}\cdot\alpha_2\gamma_1 \Rightarrow \underline{\gamma_1 = 0}$ und dann wegen $\beta_2^2 = \frac{1}{D}\cdot\alpha_3\gamma_1$ auch $\beta_2 = 0$. Also haben wir $A = \begin{bmatrix} 0 & \beta_1 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 \end{bmatrix}$. Aber $\forall i \in \{1,2,3\}$ ist

$$\alpha_i^3 + \beta_i^3 + \gamma_i^3 = 1 \Rightarrow \alpha_2^3 = \beta_1^3 = \gamma_3^3 = 1 \Rightarrow \alpha_2 = \beta_1 = \gamma_3 = 1$$

Es folgt, daß A eine Permutationsmatrix ist, und also ist $\phi_A^* f_{c_1=0} = f_0 = x^3+y^3+z^3$

$$\neq x^3+y^3+z^3+c_2xyz \quad \text{für } c_2 \neq c_1 = 0$$

$\Rightarrow f_{c_1}$ nicht linear äquivalent zu f_{c_2}

$$\Rightarrow f_{c_1} \not\sim_{\mathcal{R}} f_{c_2}$$

□

Ein weiteres Beispiel einer unimodalen Familie ist $f = x^4 + 2cx^2y^2 + y^4 \in \mathcal{E}_2$

dies wird in Blatt 8, Aufgabe 3 behandelt.

Zusammenfassend haben wir die folgenden Äquivalenzklassen von Keimen in $m^3_{\mathbb{R}_2}$ mit $\mu < 8$ sowie mit $\mu \leq 8$ und Korang ≤ 2

Name	Keim	Korang	μ	Bestimmtheit	behandelt in
A_2	x^3	1	2	3	Satz 4.13
$A_{\pm 3}$	$\pm x^4$	1	3	4	Satz 4.13
A_4	x^5	1	4	5	Satz 4.13
$A_{\pm 5}$	$\pm x^6$	1	5	6	Satz 4.13
A_6	x^7	1	6	7	Satz 4.13
$A_{\pm 7}$	$\pm x^8$	1	7	8	Satz 4.13
A_8	x^9	1	8	9	Satz 4.13
$D_{\pm 4}$	$x^2y \pm y^3$	2	4	3	Satz 4.13
$D_{\pm 5}$	$x^2y \pm y^4$	2	5	4	Satz 4.13
$D_{\pm 6}$	$x^2y \pm y^5$	2	6	5	Blatt 7, Aufg. 3
$D_{\pm 7}$	$x^2y \pm y^6$	2	7	6	Blatt 8, Aufg. 2
$D_{\pm 8}$	$x^2y \pm y^7$	2	8	7	Castrigiano-Hayes Aufgabe 6.4
$E_{\pm 6}$	$x^3 \pm y^4$	2	6	4	Übungen
E_7	$x^3 + xy^3$	2	7	4	Übungen
E_8	$x^3 + y^5$	2	8	5	Castrigiano-Hayes Aufgabe 6.4

<u>Definition 4.15.:</u> Die Keime $f(x_1, .. x_n) :=$

$\pm x_1^{k+1} \pm x_2^2 \pm \ldots \pm x_n^2$ heißen A_{k+1}, die Keime

$f(x_1, \ldots, x_n) := x_1^2 \pm x_2^{k-1} \pm x_3 \pm \ldots \pm x_n$ $(k \geq 4)$ heißen D_k

und die Keime $x^3 \pm x_2^4 \pm \ldots$, $x_1^3 + x_2^3 x_1 \pm \ldots$, $x_1^3 + x_2^5 \pm \ldots$ heißen

E_6, E_7 bzw. E_8. Diese Keime werden zusammen

als A-D-E- oder auch als einfache

Singularitäten bezeichnet.

Vorbemerkungen zu Entfaltungen

Ziel: Formuliere und beweise die folgende fundamentale Aussage: Für $f \in \mathcal{R}_n$ gilt:

$$\mu(f) < \infty \iff \exists \text{ universelle Entfaltung } F \in \mathcal{R}_{n+\mu(f)} \text{ von } f$$

Definition: Sei $f \in \mathcal{R}_n$ gegeben, dann heißt $F \in \mathcal{R}_{n+r}$ eine Entfaltung von f, falls $F(x,0) = f(x)$ $\forall x \in U$ gilt, $0 \in U \subset \mathbb{R}^n$ offene Umgebung.

Beispiele für Entfaltungen:

1.) Sei $r = 0 \Rightarrow F \in \mathcal{R}_n$ ist gleich f.

2.) $\forall r \geq 0$: $F \in \mathcal{E}_{n+r}$ definiert durch

$F(x,y) := f(x)$ ist die „triviale" Entfaltung

3.) $f = x^3 \in \mathcal{E}_1$, $F = x^3 + t \cdot x \in \mathcal{E}_2$

$t=0$: $\partial_x F = \partial_x f = 0 \iff x = 0$: ein (entarteter) krit. Pkt.

$t<0$: $\partial_x F = 3x^2 + t = 0 \iff x = \pm\sqrt{-\frac{t}{3}}$: zwei (nicht-ent.) krit. Pkt.

$t>0$: $\partial_x F = 3x^2 + t = 0$: keine Lsg. : kein kritischer Pkt.

4.) $f = y^2 - x^3 \in \mathcal{E}_2$, $F = y^2 - x^2(t+x) \in \mathcal{E}_3$

(siehe 2. Vorlesung)

$\underline{t=0}$: 1 krit. Pkt

$\underline{t \neq 0}$: $\partial_y F = 2y$, $\partial_x F = -3x^2 - 2xt = -x(3x-2t)$

$\Rightarrow \mathrm{Crit}_F = \{(0,0), (\frac{2}{3}t, 0)\}$

$\rightsquigarrow t \neq 0$ immer 2 kritische Punkte

5.) $f = x^4 \in \mathcal{R}_1$, $F = x^4 - tx^2 + s \cdot x \in \mathcal{R}_3$

$\partial_x F = 4x^3 - 2t \cdot x + s \Rightarrow \mathrm{Crit}_F = \{(x,t,s) \mid 4x^3 - 2tx + s = 0\}$

ACHTUNG: Im Castrigiano-Hayes heißt Crit_F „catastrophe surface" und wird mit M_F bezeichnet. Dort gibt es auch noch das „catastrophe set", bezeichnet mit C_F. Ich nenne es Entartungsmenge, definiert durch $\mathrm{Deg}_F = \{(x,t,s) \in \mathrm{Crit}(F) \mid (\partial_x^2 F)(x,t,s) = 0\}$

Also $\mathrm{Deg}_F = \{(x,t,s) \mid 4x^3 - 2tx + s = 0 \text{ und } 12x^2 - 2t = 0\}$

$= \{(x,t,s) \mid 4x^3 - 2tx + s = 0 \,\&\, t = 6x^2\}$

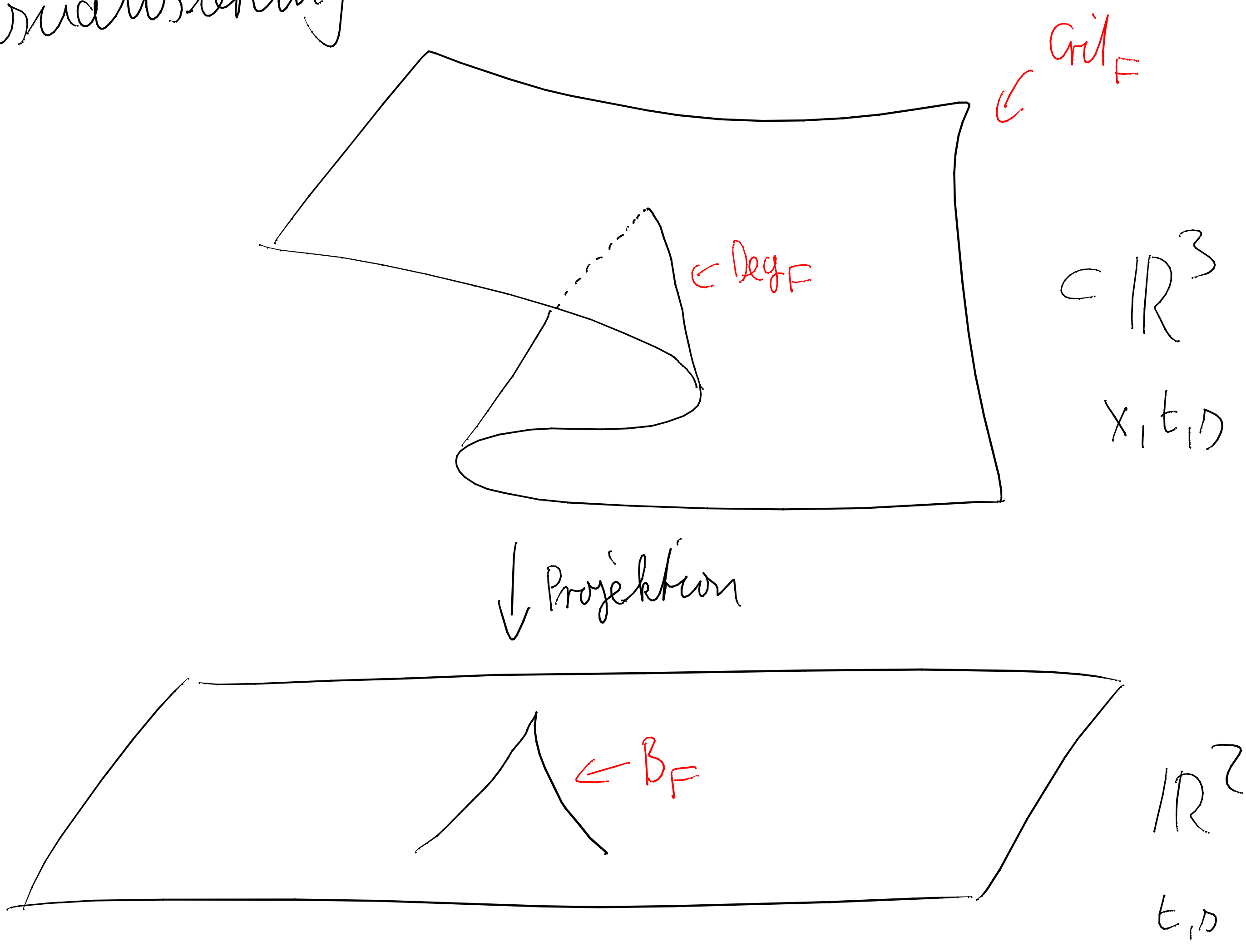
$= \{(x,t,s) \mid s = 8x^3 \,\&\, t = 6x^2\}$

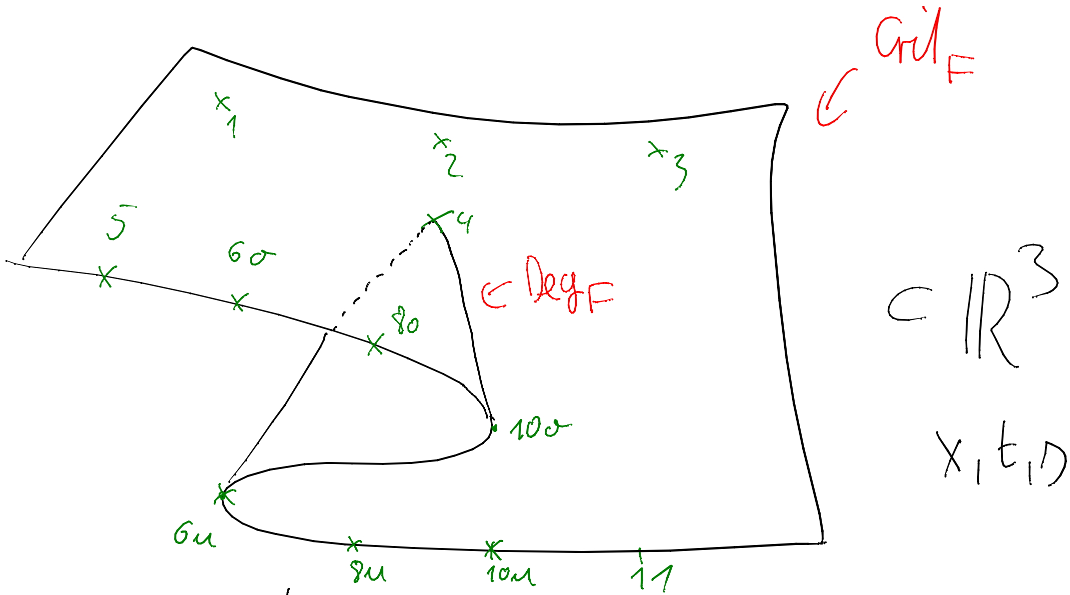
$= \mathrm{Im}\left(\gamma : (\mathbb{K},0) \to (\mathbb{K}^3,0),\ x \mapsto (x, 6x^2, 8x^3)\right)$

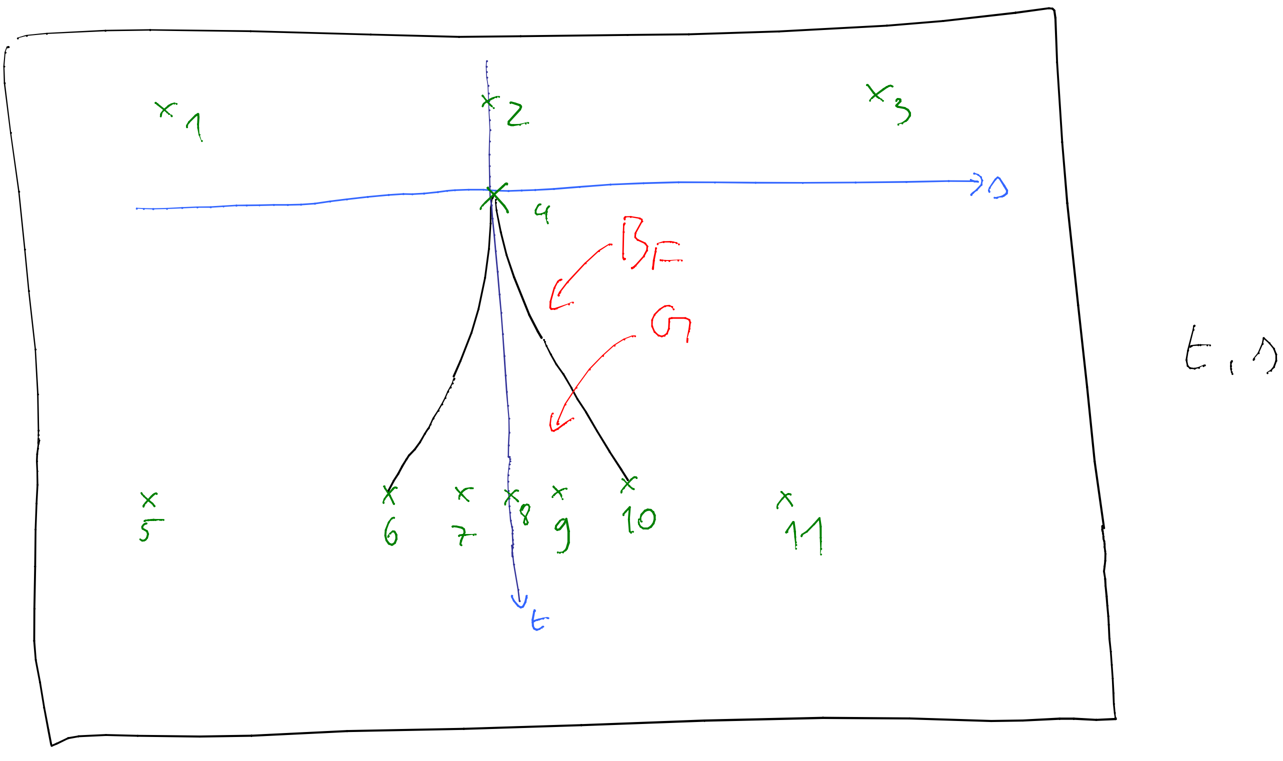
Weiterhin gibt es noch das Bifurkations-diagramm $B_F \subset U \subset \mathbb{R}^2$, nämlich das Bild von Deg_F unter der Projektion $\mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^2$; $(x,t,s) \mapsto (t,s)$. Also ist $B_F = \mathrm{Im}\left(\tilde{f}: (\mathbb{K},0) \to (\mathbb{K}^2,0);\ x \mapsto (6x^2, 8x^3)\right) = \left\{(t,s) \mid t^3 - \frac{27}{16}s^2 = 0\right\}$

<u>Geometrische Bedeutung von $\mathrm{Crit}(F)$, $\mathrm{Deg}(F)$, B_F:</u>

Visualisierung



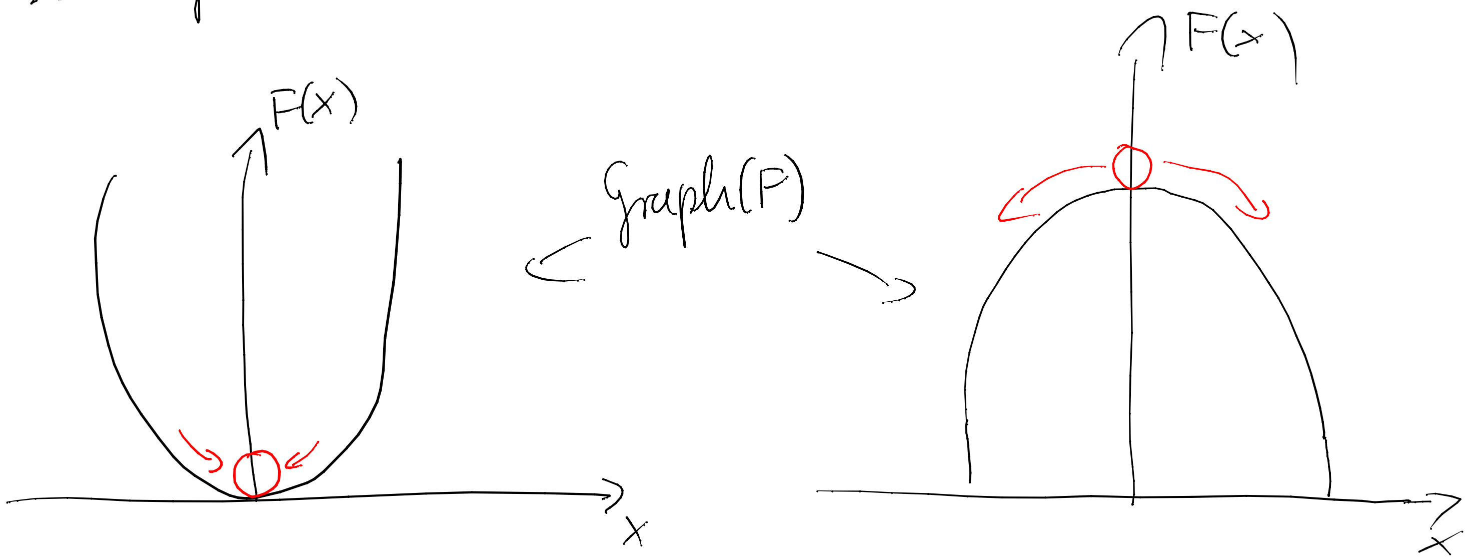




Sei G der Bereich der (t,s)-Ebene unterhalb des Bifurkationsdiagramms. $\forall\, (s,t) \in \mathbb{R}^2 \setminus (G \cup B_F)$ gibt es genau ein Urbild in Crit$_F$, und dies ist ein Minimum von $F(-,s,t)$. Über Deg_F ist auch nur ein kritischer Punkt, dieser ist entartet, nämlich ein Sattelpunkt für $(s,t) \neq (0,0)$, und ein kritischer Punkt 4. Ordnung, nämlich $f = x^4$ bei $(s,t) = (0,0)$.

$\forall (s,t) \in G$ gibt es 3 Urbilder in $Crit_F$, der obere und der untere sind auch Minima (denn sie sind aus $proj^{-1}(\mathbb{R}^2 \setminus (B_F \cup G))$ erreichbar, ohne Deg_F zu überschreiten), der mittlere ist ein lokales Maximum.

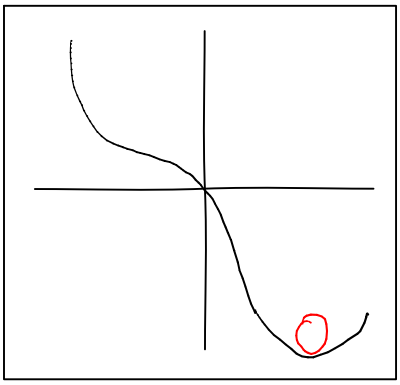
Angenommen, F ist der Zustand (z.B. Energie) eines zu modellierenden Systems. Ein lokales Minimum entspricht einem stabilen Zustand, d.h., durch kleine Störung der Parameter wird das System nicht qualitativ verändert. Lokale Maxima hingegen sind instabil: schon durch kleine Veränderungen der Parameter kann das System sich qualitativ ändern:



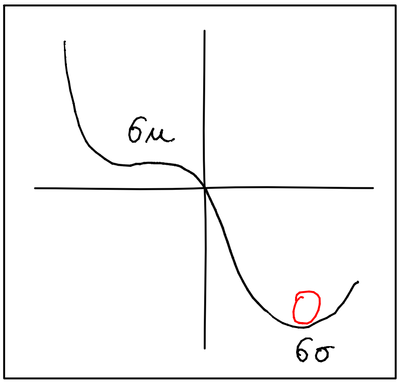
Betrachte nun für das Beispiel $F(x,s,t) = x^4 - tx^2 + s$ eine Gerade in der (s,t)-Ebene, welche die Punkte 5–11 verbindet. Durchlaufe diese Kurve einmal von links nach rechts, und einmal von rechts nach links. Wähle jeweils eine Urbildkurve in Crit_F.

Dann hat man folgende Bilder für die Graphen von F und stabilen Gleichgewichtszustände: $5 \to 6 \to \dots \to 11$ mit Urbild

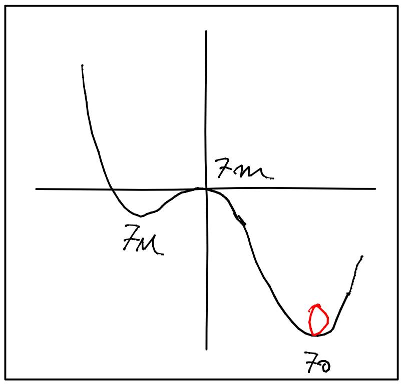
$$5 \to 6o \to \dots \to 10o \to 10u \to 11$$



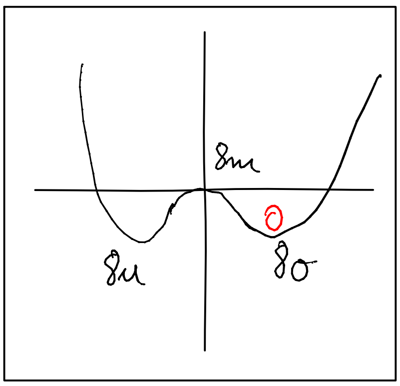
5



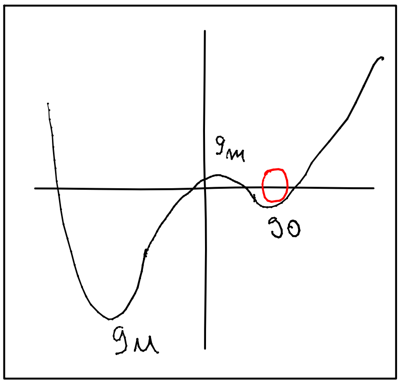
6



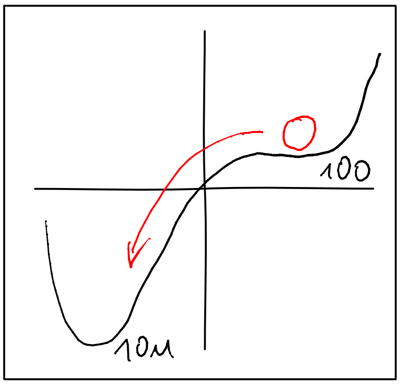
7



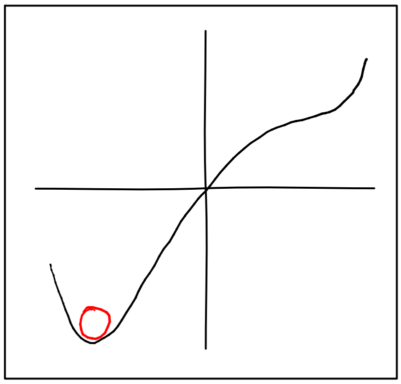
8



9



10



11

Man sieht: Das stabile System wird beim Verlassen der Region G via B_F, d. h., beim Durchlaufen von Position 10 von links nach rechts instabil und wechselt plötzlich von 10o nach 10u in Gr_F.
Analoges gilt beim Durchlaufen von rechts nach links, hier wechselt das System bei Position 6 plötzlich von 6u nach 6o und wieder fällt der „Ball" aus einem Sattelpunkt auf ein lokales Minimum.