Definition 4.3: Sei $f \in \mathcal{R}_n$ und $g \in \mathcal{R}_k$, $k \leq n$, f und g heißen stabil äquivalent, falls

$$g(x_1, \dots, x_k) + a_{n+1}x_{n+1}^2 + \dots + a_m x_m^2 \underset{\mathcal{R}}{\sim} f(x_1, \dots, x_n) \quad \& \quad a_i \in \begin{cases} \{-1, 1\} & \mathcal{R} = \mathcal{E}_n \\ \{1\} & \mathcal{R} = \mathcal{O}_n \end{cases}$$

Lemma 4.4: Sei $f \in \mathcal{R}_n$, $q \in \mathcal{R}_m$ nicht-entartete quadratische Form. Dann ist $\mu(f+q) = \mu(f)$.

Beweis: Sei $r := m+n$, dann gilt: $J_{f+q} = J_f \mathcal{R}_r + J_q \mathcal{R}_r$

$J_q \mathcal{R}_r = m_{\mathcal{E}_m} \mathcal{R}_r$ und wegen $\mathcal{R}_r = m_{\mathcal{R}_m} \mathcal{R}_r \oplus \mathcal{R}_n$ ist

also $J_{f+q} = J_f + m_{\mathcal{R}_m} \mathcal{R}_r \Rightarrow \mathcal{R}_r / J_{f+q} \simeq \mathcal{R}_n / J_f$ $\square$

$\Rightarrow \mu(f+q) = \mu(f)$

<u>Lemma 4.5.:</u> Sei $f \in m^2_{\mathcal{E}_n}$, $\mu(f) < \infty$, Korang $(f) = 1$ dann ist f stabil äquivalent zu $\varepsilon \cdot x^{\mu+1}$, $\varepsilon \in \begin{cases} \{1,-1\} \\ \{1\} \end{cases}$.
(außerdem: $\varepsilon = 1$ falls $\mathcal{R} = \mathcal{E}_n$ und μ grade)

<u>Beweis:</u> Aus Satz 4.2 folgt, daß

$$f \underset{\mathcal{R}}{\sim} g(x_1) + q(x_2, x_3, \dots, x_n)$$ wobei q

eine quadratische Form ist, und $\mu(f) = \mu(g)$ (Lemma 4.4.)

Lemma 1.6. besagt, daß $g(x_1) \sim \varepsilon x_1^{\mu(g)+1} = \varepsilon x_1^{\mu+1}$ gilt,

also ist f stabil äquivalent zu $\varepsilon x_1^{\mu+1}$ $\square$

Jetzt wollen wir μ in Abhängigkeit vom Korang abschätzen.

<u>Lemma 4.6:</u> Sei $f \in m^2_{\mathcal{E}_n}$, $\mu(f) < \infty$, dann ist

$$J_f = m_{\mathcal{E}_n} J_f \oplus \mathbb{K}\, \partial_{x_1} f \oplus \dots \oplus \mathbb{K}\, \partial_{x_n} f$$

<u>Beweis:</u> klar: $m_{\mathcal{R}_n} J_f \subset J_f$, $\partial_{x_i} f \in J_f$

Sei $g \in J_f$, d.h. $\exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathcal{R}_n : g = \sum_{i=1}^n \lambda_i \partial_{x_i} f$

setze $\hat{\lambda}_i := \lambda_i - \lambda_i(0) \Rightarrow \hat{\lambda}_i \in m_{\mathcal{R}_n}$ und

$$g = \underbrace{\sum_{i=1}^n \hat{\lambda}_i \partial_{x_i} f}_{\in\, m J_f} + \sum_{i=1}^n \underbrace{\lambda_i(0) \cdot \partial_{x_i} f}_{\in\, \mathbb{K}\partial_{x_i} f} \quad \Rightarrow J_f = mJ_f + \mathbb{K}\partial_{x_1} f + \dots + \mathbb{K}\partial_{x_n} f$$

noch z.z.: diese Summe ist direkt. Es reicht, zu zeigen, daß aus $\sum h_i(x)(\partial_{x_i} f)(x) = 0 \Rightarrow h_i(0) = 0$

(Sei $\sum g_i(x)\partial_{x_i} f + \sum a_i \cdot \partial_{x_i} f = 0$, $g_i \in m_{\mathcal{R}_n} \Rightarrow g_i(0) + a_i = 0 \overset{g_i \in m_{\mathcal{R}_n}}{\Longrightarrow} a_i = 0 \Rightarrow \sum g_i(x)\partial_{x_i} f = 0$)

Falls nicht, dann $\exists\, \varphi \in G_n : \varphi^*\left(\sum_{i=1}^n h_i \cdot \partial_{x_i} f\right) = \partial_{x_1}(f \circ \varphi)$

Dies läßt sich wieder mit Hilfe der Existenzsätze für Lsg. von gewöhnlichen DGL's beweisen. (siehe auch Beweis von Satz 3.6.)

$\Rightarrow \partial_{x_1}(f \circ \varphi) = 0 \Rightarrow f \circ \varphi \in \mathcal{R}_{n-1} \Rightarrow \mu(f) = \mu(f \circ \varphi) = \infty$ ↯

Lemma 4.7.: $f \in m^2_{\mathcal{R}_n}$, $k = $ Korang (f), dann ist

$\mu(f) > \frac{1}{2} k \cdot (k+1)$ (eventuell $\mu(f) = \infty$).

Beweis: 1. Fall: $k = 0 \Rightarrow \mu(f) = 1$

2. Fall: $\mu(f) = \infty$

3. Fall: $k > 0$, $\mu(f) < \infty$: Nach Satz 4.2.

$f \sim \underbrace{g(x_1, \ldots, x_k)}_{\in m^3_{\mathcal{R}_k}} + \underbrace{q(x_{k+1}, \ldots, x_n)}_{\text{quadratisch}}$ & nach Lemma 4.4

$\mu(f) = \mu(g)$. Setze $I := m_{\mathcal{R}_k} J_g \subset \mathcal{R}_k$. Nach

Lemma 4.6. (angewendet auf g) ist dann

$\mu(g) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{R}_k / J_g = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{R}_k / I - k$. Wegen

$g \in m^3_{\mathcal{R}_k} \Rightarrow J_g \subset m^2_{\mathcal{R}_k} \Rightarrow I \subset m^3_{\mathcal{R}_k} \Rightarrow \dim \mathcal{R}_k / I$

$\geq \dim \mathcal{R}_k / m^3_{\mathcal{R}_k} = \binom{k+2}{2}$

Also $\mu(f) \geq \binom{k+2}{2} - k$

$$\Rightarrow \mu(f) > \frac{(k+2)(k+1)}{2} - k - 1$$

$$= \frac{k^2+3k+2-2k-2}{2} = \frac{k^2+k}{2} = \frac{k(k+1)}{2}$$

$\square$

<u>Konsequenz:</u> Wollen wir Keime bis einschließlich $\mu = 5$ klassifizieren, so ist $\text{Korang}(f) \leq 2$. Da der Fall $\text{Korang}(f) = 1$ in Lemma 4.5 behandelt wurde, können wir uns also auf $\text{Korang}(f) = 2$ beschränken, dann gilt nach dem Spaltungslemma

$$f \underset{R}{\sim} g(x,y) + \sum_{i \geq 2} a_i x_i^2 \quad a_i \in \{-1,1\}, \quad g \in m_{R_2}^3$$

Andererseits: $\text{Korang}(f) = 2 \xRightarrow{4.6} \mu(f) \geq 4$

Wir müssen also nur solche Keime g klassifizieren, beachte $g \underset{R}{\sim} g_3 + \dots + g_{\mu+1}$ mit

$$g_d \in \mathbb{K}[x,y]_d := \left\{ \sum_{i+j=d} a_{ij} x^i y^j \;\middle|\; a_{ij} \in \mathbb{K} \right\}$$

Satz 4.8.: Sei $g_3 = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 \in \mathbb{K}[x,y]_3$

Dann existiert $A \in Gl(2,\mathbb{K})$, so daß für $\phi_A(x,y) = A \cdot (x,y)^{tr} \in g_2$ gilt:

$$\phi_A^* g_3 \in \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ x^3 \\ x^2y \\ x^3 - xy^2 \\ x^3 + y^3 \end{array} \right\} \leftarrow$$

diese Keime sind linear inäquivalent falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sind nur $x^3 - xy^2$ und $x^3 + y^3$ äquivalent

Beweis: Falls einer der obigen Keime durch eine lineare Transformation in einen anderen überführt werden kann, dann gilt das auch für seine kritische Menge und seinen Verschwindungsort

Keim	Verschwindungsort	kritische Menge
0	$\mathbb{K}^2$	$\mathbb{K}^2$
x^3	$\{x=0\}$	$\{x=0\}$
x^2y	$\{x=0\} \cup \{y=0\}$	$\{x=0\}$
x^2-xy	$\{x=0\} \cup \{x=y\} \cup \{x=-y\}$	$\{0\}$
x^3+y^3	$\{x=-y\}$ für $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ $\{x=-y\} \cup L_1 \cup L_2$ für $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ L_1, L_2 1-dim UVR in $\mathbb{C}^2$	$\{0\}$

$\Rightarrow \mathbb{K}=\mathbb{R}$: $\nexists$ ein Trafo, welche diese Keime ineinander überführt

$\mathbb{K}=\mathbb{C}$: nur x^2xy & x^3+y^3 können lin. äquivalent sein (sind sie tatsächlich, siehe unten)

<u>Beweis der Existenz von A:</u> Für $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ ist

$$\phi^*(x) = \alpha \cdot x + \beta \cdot y \quad ; \quad \phi^*(y) = \gamma \cdot x + \delta \cdot y$$

$$\phi^* g_3 = \phi^*\left(ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3\right)$$

$$= a(\alpha x+\beta y)^3 + b(\alpha x+\beta y)^2(\gamma x+\delta y) + c(\alpha x+\beta y)(\gamma x+\delta y)^2$$

$$+ d(\gamma x+\delta y)^3$$

$$= a\cdot\alpha^3x^3 + 3a\alpha^2\beta x^2y + 3a\alpha\beta^2xy^2 + a\beta^3y^3$$

$$+ (b\alpha^2x^2 + 2b\alpha\beta xy + b\beta^2y^2)(\gamma x + \delta y)$$

$$(c\alpha x + c\beta y)(\gamma^2x^2 + 2\gamma\delta xy + \delta^2y^2)$$

$$+ d\gamma^3x^3 + 3d\gamma^2\delta x^2y + 3d\gamma\delta^2xy^2 + d\delta^3y^3$$

$$= a\cdot\alpha^3x^3 + 3a\alpha^2\beta x^2y + 3a\alpha\beta^2xy^2 + a\beta^3y^3$$

$$+ b\alpha^2\gamma x^3 + 2b\alpha\beta\gamma x^2y + b\beta^2\gamma xy^2 + b\alpha^2\delta x^2y + 2b\alpha\beta\delta xy^2 + b\beta^2\delta y^3$$

$$+ c\alpha\gamma^2x^3 + 2c\alpha\gamma\delta x^2y + c\alpha\delta^2xy^2 + c\beta\gamma^2x^2y + 2c\beta\gamma\delta xy^2 + c\beta\delta^2y^3$$

$$+ d\gamma^3x^3 + 3d\gamma^2\delta x^2y + 3d\gamma\delta^2xy^2 + d\delta^3y^3$$

$$\begin{aligned}
= x^3\Big(\underbrace{a\alpha^3 + b\alpha^2\gamma + c\alpha\gamma^2 + d\gamma^3}_{a'}\Big) &+ x^2y\Big(\underbrace{3a\alpha^2\beta + b(2\alpha\beta\gamma + \alpha^2\delta) + c(2\alpha\gamma\delta + \beta\gamma^2) + 3d\gamma^2\delta}_{b'}\Big) \\
&+ xy^2\Big(\underbrace{3a\alpha\beta^2 + b(\beta^2\gamma + 2\alpha\beta\delta) + c(\alpha\delta^2 + 2\beta\gamma\delta) + 3d\gamma\delta^2}_{c'}\Big) \\
&+ y^3\Big(\underbrace{a\beta^3 + b\beta^2\delta + c\beta\delta^2 + d\delta^3}_{d'}\Big)
\end{aligned}$$

$$= a'x^3 + b'x^2y + c'xy^2 + d'y^3$$

1. Fall: $a=0 \rightsquigarrow$ setze $\alpha=\delta=0$ & $\beta=\gamma=1$

2. Fall $a\neq 0 \rightsquigarrow$ setze $\alpha=\delta=1$ & $\gamma=0$ & $\beta\in\mathbb{R}$ s.d.

$$a\beta^3+b\beta^2+c\beta+d=0$$

$\Rightarrow$

$$d'=0 \ \& \ \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\in Gl(2,\mathbb{R})$$

$\rightsquigarrow$ oBdA kann man $d=0$ annehmen, d.h.

$$g_3(x,y)=ax^3+bx^2y+cxy^2$$

1. Fall: $c\neq 0$, setze: $\alpha=\delta=1, \beta=0, \gamma=-b/2c \Rightarrow \begin{smallmatrix}b'=0\\ d'=0\end{smallmatrix}$

2. Fall: $c=0$, $b\neq 0$ setze: $\alpha=0, \beta=\gamma=1, \delta=-a/b$

$\Longrightarrow b'=0$ (klar wegen $\alpha=0$, δ kann beliebig sein)
& $d'=0$ (hier wird $\delta=-a/b$ gebraucht)

3. Fall: $c=b=0$ setze: $\beta=0$

$\rightsquigarrow$ oBdA: $g_3(x,y)=ax^3+cxy^2$

Jetzt hat man 4 Fälle.

1. Fall: $a=c=0 \rightsquigarrow g_3=0$

2. Fall: $c=0, a\neq 0 \rightsquigarrow g_3 \mathrel{\underset{\substack{\uparrow\\ \text{lin.}\\ \text{äquivalent}}}{\hat{=}}} x^3$

3. Fall: $c \neq 0,\ a = 0 \rightsquigarrow g_3 \mathrel{\hat{=}} xy^2 \mathrel{\hat{=}} x^2y$

4. Fall: $K = O_n$: $a \neq 0,\ c \neq 0 \Rightarrow g_3 \mathrel{\hat{=}} x^3 - xy^2$

$K = E_n$: 4.1. Fall: $a \cdot c < 0 \Rightarrow g_3 \mathrel{\hat{=}} x^3 - xy^2$

4.2. Fall: $a \cdot c > 0 \Rightarrow g_3 \mathrel{\hat{=}} x^3 + xy^2$

Setze: $x = \frac{1}{4^{1/3}} \tilde{x} + \tilde{y}$; $y = \frac{3^{1/2}}{4^{1/3}} (\tilde{x} - \tilde{y})$

$$\rightsquigarrow g_3 = \frac{1}{4}(\tilde{x}+\tilde{y})^3 + \frac{1}{4^{1/3}}(\tilde{x}+\tilde{y}) \frac{3}{4^{2/3}} (\tilde{x}-\tilde{y})^2$$

$$= \frac{1}{4}(\tilde{x}+\tilde{y}) \left((\tilde{x}+\tilde{y})^2 + 3(\tilde{x}-\tilde{y})^2 \right)$$

$$= \frac{1}{4}(\tilde{x}+\tilde{y}) \left(4\tilde{x}^2 + 4\tilde{y}^2 - 4\tilde{x}\tilde{y} \right) = \tilde{x}^3 + \tilde{y}^3$$

$\Rightarrow g_3 \mathrel{\hat{=}} x^3 + y^3$

$\square$