Technische Universität Chemnitz, Fakultät für Mathematik
Christian Sevenheck, Frank Göring

Übungen zur Linearen Algebra

1. Sei durch

$$\begin{aligned} S :&\mathbb{R}[x]_3 \times \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}, \\ &(p,q) \mapsto S(p,q) = p(1)q(1) + p'(1)q'(1) + p''(1)q''(1) + p'''(1)q'''(1) \end{aligned}$$

   eine Abbildung gegeben.

   (a) Weisen Sie nach, dass diese Abbildung eine Bilinearform ist!

   (b) Bestimmen Sie die darstellende Matrix von S bezüglich der Basis $\{x^3, x^2, x, 1\}$

   (c) Ist S ein Skalarprodukt?

   (d) Finden Sie eine Basis von $\mathbb{R}[x]_3$ derart, dass S eine möglichst einfache darstellende Matrix hat!

2. Erläutern Sie die Begriffe

   - orthogonal
   - orthogonales Komplement
   - orthonormal
   - Vektorprodukt,
   - orthogonale direkte Summenzerlegung
   - (spezielle) orthogonale bzw. unitäre Gruppe

   und geben Sie Beispiele!

3. Wie kann man die Aufgabe 6 des fünften Übungsblattes mittels des Orthonormalisierungsverfahrens von Gram-Schmid lösen?

4. Sei V der Vektorraum, der von den $2n+1$ Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 1$; $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(kx)$ und $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos(kx)$ mit jeweils $k \in \{1, \ldots, n\}$ aufgespannt wird. Sind f und g aus V so sei $< f, g > := \int\limits_0^{2\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x$

   (a) Weisen Sie nach, dass damit ein Skalarprodukt von V definiert wurde!

   (b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von V bzgl. dieses Skalarprodukts!

   (c) Offenbar ist V Untervektorraum des (unendlichdimensionalen) Vektorraums W aller reellen Funktionen mit Periode 2π, den man mit dem entsprechenden Skalarprodukt ausstatten kann. Wie kann man von einer möglichst genauen Näherung $g \in V$ einer Funktion $f \in W$ die Koordinaten bezüglich der von Ihnen bestimmten Orthonormalbasis ermitteln?

5. Kann man die Überlegung zu $O(3)$ und $SO(3)$ aus der Vorlesung auch auf $O(4)$ und $SO(4)$ übertragen?

Bei jeglichen Fragen zur Vorlesung (Stoff, Übungen, Organisatorisches, etc.) können Sie uns jederzeit per E-Mail unter

{christian.sevenheck, fgoering}@mathematik.tu-chemnitz.de

erreichen. Nach Terminvereinbarung sind wir natürlich auch persönlich zu sprechen.

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Hausaufgaben- und Übungsblätter, etc.) sind unter

`https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/LinAlg2-SS17/linalg2.php`

zu finden.