Übungen zur Linearen Algebra 2

1. Sei K ein Körper und $A \in \mathrm{GL}(n, K)$. Zeigen Sie, dass $A^{-1} \in \mathrm{span}(E_n, A^k : k \in \mathbb{N})$ und geben Sie eine solche Linearkombination an. (Tipp: Cayley-Hamilton).

2. Seien A und B eine $(n \times m)$-Matrix und eine $(m \times n)$-Matrix mit Einträgen aus einem Körper K. Zeigen Sie: Für die charakteristischen Polynome P_{AB} von AB und P_{BA} von BA gilt die Gleichung $t^n P_{AB}(t) = t^m P_{BA}(t)$.

3. Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_3, x_1, x_2)$. Finden Sie eine Basis $\mathcal{B}$ mit $M_{\mathcal{B}}(F)$ gemäß Satz 8.31 aus der Vorlesung.

4. Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1)$ der Flip-Operator. Bestimmen Sie sein Minimalpolynom! Was kann man daraus über seine Eigenwerte und Eigenräume schließen? Bestimmen Sie seine Eigenwerte und Eigenräume!

5. Unter welchen Voraussetzungen lässt sich aus den Dimensionen der Eigenräume und dem faktorisiertem (also auch faktorisierbaren) charakteristischen Polynom eines Endomorphismus direkt auf dessen Minimalpolynom schließen? Finden Sie zusätzlich ein möglichst einfaches Beispiel, wo das nicht geht (also zwei Endomorphismen mit gleichem charakteristischen Polynom, gleichen Eigenraumdimensionen aber verschiedenen Minimalpolynomen)!

6. Definieren Sie den Begriff Hauptraum und entwickeln Sie Beispiele!

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Hausaufgaben- und Übungsblätter, etc.) sind unter

`https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/LinAlg2-SS17/linalg2.php`

zu finden.