Übungen zur Linearen Algebra 2

1. Wiederholung: Erläutern Sie die Begriffe Körper, Vektorraum, lineare Abbildung, Dualraum, Dualbasis, Annulator, Vektorraumendomorphismus, Determinante, Eigenwert, Eigenraum.
2. Bestimmen Sie eine Basis des Dualraums zum $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}[x]_3$ aller reellen Polynome vom Grad höchstens drei!

   Sei weiter $U \subseteq \mathbb{R}[x]_3$ die Menge der Polynome vom Grad höchstens drei, die sowohl bei $x = 1$ als auch bei $x = -1$ eine Nullstelle haben. Bestimmen sie eine Basis von U^0!
3. Die Vektoren $[2, 1, 0]^T$ und $[1, 2, 0]^T$ und $[1, 1, 1]^T$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die zugehörige Dualbasis!
4. Sei V ein K-Vektorraum, $\dim V = n$ und V^* der Dualraum. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:
   (a) Die Elemente $v_1^*, \dots v_n^*$ von V^* sind in V^* linear abhängig.
   (b) Es gibt $v \in V$ verschieden vom Nullvektor derart, dass $v_1^*(v) = \ldots = v_n^*(v)$ das Nullelement von K ist.
5. Entscheiden Sie, ob folgende Familien Basen von $(\mathbb{R}^3)^*$ bzw. $\mathbb{R}^3$ sind und bestimmen sie gegebenenfalls die duale Basis $A^* = \{[1, 2, 3], [2, 1, 2], [0, 3, 1]\}$, $B = \{[1, 2, 1]^T, [2, 1, 2]^T, [0, 3, 1]^T\}$
6. Wir betrachten wieder den $\mathbb{R}$- Vektorraum $\mathbb{R}[x]_3$. Die Abbildung, die jedem seiner Elemente dessen Ableitung zuordnet, ist ein Vektorraumendomorphismus. Bestimmen sie ihre Eigenwerte und Eigenräume.
7. Ermitteln Sie das charakteristische Polynom sowie die Eigenwerte und Eigenräume der folgenden Matrizen als Endomorphismen reeller Vektorräume

   (a) $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Hinweise

Begleitend zur Vorlesung wird es jede Woche ein Übungsblatt sowie ein Hausaufgabenblatt geben. Das Übungsblatt sollen Sie unter Anleitung in der Übung lösen, das Hausaufgabenblatt soll bis zur nächsten Woche selbstständig bearbeitet werden. Natürlich können und sollen Sie sich dabei mit Ihren Kommilitonen austauschen. Die Bearbeitung der Hausaufgaben und der Übungen ist integraler Bestandteil der Vorlesung und zum Bestehen der Prüfung unerlässlich. Eine formale Voraussetzung, um an der Prüfung teilnehmen zu können, ist, dass Sie bei den Hausaufgaben mindestens 40% der Punkte erreicht haben.

Die Hausaufgaben werden korrigiert und die Lösungen werden, soweit dafür Erklärungsbedarf besteht, jeweils einmal pro Woche in den Übungen besprochen. Dabei sollen die Lösungen, soweit dies möglich ist, hauptsächlich von Ihnen selbst an der Tafel vorgerechnet werden. Dies hilft Ihnen die gefundene Lösung noch einmal zu durchdenken und trainiert Sie dabei Ihre Ideen auch vor Publikum vorzutragen.

Bei jeglichen Fragen zur Vorlesung (Stoff, Übungen, Organisatorisches, etc.) können Sie uns jederzeit per E-Mail unter

{christian.sevenheck, fgoering}@mathematik.tu-chemnitz.de

erreichen. Nach Terminvereinbarung sind wir natürlich auch persönlich zu sprechen.

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Hausaufgaben- und Übungsblätter, etc.) sind unter

`https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/LinAlg2-SS17/linalg2.php`

zu finden.