Hausaufgaben zur Linearen Algebra
Probeklausur

1. *(1+3 Punkte)* Sei $V = \mathbb{R}^4$ und U der von den Vektoren a_1, a_2, a_3 ezeugte Unterraum, wobei

$$(a_1, a_2, a_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

ist. Führen Sie das Gram-Schmidt-Verfahren bezüglich des Standardskalarprodukts für die Basis (a_1, a_2, a_3) von U durch und bestimmen Sie so eine Orthogonalbasis von U.

2. *(2+2 Punkte)* Sind die beiden folgenden hermiteschen Matrizen A_3 und $B_3 \in M(3 \times 3, \mathbb{C})$ positiv definit? Beweisen Sie Ihre Antwort. Bei B_3 ist $\xi := e^{2\pi i/5}$.

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1+2i & 0 \\ 1-2i & 3 & i \\ 0 & -i & 3 \end{pmatrix}, \qquad B_3 = \begin{pmatrix} 2 & \xi & \xi^3 \\ \xi^4 & 1 & \xi^3 \\ \xi^2 & \xi^2 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. *(5 Punkte)* Bestimmen Sie für die Matrix $A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{Q})$ die Eigenwerte, Eigenräume, Haupträume und eine Jordannormalform.

4. *(4 Punkte)* In dieser Aufgabe wird mit dem Körper $\mathbb{F}_3$ gerechnet. Seine Elemente werden der Einfachheit halber mit $0, 1, 2$ bezeichnet (also zum Beispiel $1 + 2 = 0, 2 + 2 = 1, 2 \cdot 2 = 1$); diese Bezeichnungen können Sie auch in Ihrer Lösung benutzen.

   Finden Sie mit dem allgemeinen Orthogonalisierungsverfahren eine Matrix $T \in GL(3 \times 3, \mathbb{F}_3)$ mit $T^{tr} \cdot A_5 \cdot T =$ Diagonalmatrix. Hier ist

$$A_5 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{F}_3).$$

   Notieren Sie in Ihrer Rechnung alle Spalten- und Zeilenumformungen.

5. *(2+2 Punkte)* Beweisen Sie die Aussagen (a) und (c) des folgenden Spektralsatzes.

   Satz: *Sei V ein endlich-dimensionaler unitärer $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Skalarprodukt ϕ, und sei $f : V \to V$ ein unitärer Endomorphismus. Dann gilt*

   (a) *Alle Eigenwerte von f haben Betrag 1.*

   (b) *f ist diagonalisierbar, d.h. $\mathrm{Hau}(f, \lambda) = \mathrm{Eig}(f, \lambda)$ für alle Eigenwerte λ.*

   (c) *Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal zueinander.*

6. *(2+2 Punkte)* V sei ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

   (a) Formulieren Sie die Eigenschaften, mit denen eine Abbildung $\nu : V \to \mathbb{R}_0^+$ eine Norm ist.

   (b) Nun sei V ein Euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt ϕ, und es sei $\|x\| := \sqrt{\phi(x,x)}$. Zeigen Sie, daß $\|.\|$ eine Norm ist.

7. *(1+2+2 Punkte)* Laut Vorlesung ist eine orthogonale Abbildung $a \in O(3)$ eine Drehung, falls $a \in SO(3)$ ist, und eine Drehspiegelung, falls $a \in O(3) \backslash SO(3)$ ist.

   (a) Charakterisieren Sie die Drehachse von a im Fall $a \in SO(3) \backslash \{\mathrm{id}\}$.

   (b) Charakterisieren Sie die Spiegelebene des Spiegelungsanteils von a im Fall $a \in O(3) \backslash (SO(3) \cup \{-\mathrm{id}\})$.

   (c) Sei $a \in SO(3) \backslash \{\mathrm{id}\}$ mit Drehachse $\mathbb{R} \cdot v$, $v \in M(3 \times 1, \mathbb{R}) - \{0\}$, und sei $b \in O(3)$. Zeigen Sie, daß $b \circ a \circ b^{-1}$ eine Drehung ist und bestimmen Sie ihre Drehachse.

8. *(5 Punkte)* Bestimmen Sie in Abhängigkeit von den drei Parametern $a, b, c \in \mathbb{C}$ die Jordanblockstruktur der Matrix

$$A_{10} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Hinweise: Es reicht, irgendwie die Eigenwerte und die Größen der Jordanblöcke einer Jordannormalform zu bestimmen. Es ist dafür *nicht* nötig, eine Matrix T mit $T^{-1} \cdot A \cdot T$ in Jordannormalform auszurechnen.

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Hausaufgaben- und Übungsblätter, etc.) sind unter

`https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/LinAlg2-WS1617/linalg2.php`

zu finden.

Abgabe bis Dienstag, den 11. Juli 2017, in den Übungen