Hausaufgaben zur Linearen Algebra

1. *(4 points)* Let $f : V \to V$ be an endomorphism of a finite dimensional unitary $\mathbb{C}$-vector space. Let f^{ad} denotes the adjoint endomorphism.
   (a) Show $\ker f = \ker(f^{\mathrm{ad}} \circ f)$.
   (b) Does also $\ker f = \ker(f \circ f^{\mathrm{ad}})$ hold? Either show it or provide a counterexample.

2. *(4 Punkte)* Sei $A \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{C})$ antihermitesch, das heißt $-A = {}^{tr}A$. Zeigen Sie, dass A normal ist und alle Eigenwerte von A in $i\mathbb{R}$ liegen.

3. *(4 Punkte)* Sei $\mathcal{D} = \mathcal{D}((-1,1), \mathbb{R})$ der Vektorraum der auf $(-1,1)$ differenzierbaren Funktionen.
   (a) Zeigen Sie, dass $d : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $(f,g) \mapsto (fg)'(0)$ eine symmetrische Bilinearform ist.
   (b) Bestimmen Sie den Ausartungsraum $\mathcal{D}_0$ von d.

4. *(4 Punkte)*
   (a) Bestimmen Sie für die Matrix

$$A = \frac{1}{90}\begin{pmatrix} 66 & -18\sqrt{6} & 10\sqrt{18} \\ 6\sqrt{6} & 72 & 15\sqrt{12} \\ -14\sqrt{18} & -9\sqrt{12} & 60 \end{pmatrix}$$

   eine Matrix $S \in \mathrm{U}(3)$, so dass ${}^t\overline{S}AS$ Diagonalgestalt hat.
   (b) Berechnen Sie für die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   eine Matrix $T \in \mathrm{O}(3)$, so dass ${}^tSAS$ eine Diagonalmatrix ist.

5. *(4 Punkte)* Berechnen Sie die Signatur der folgenden symmetrischen Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Hausaufgaben- und Übungsblätter, etc.) sind unter

`https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/LinAlg2-WS1617/linalg2.php`

zu finden.

Abgabe bis Dienstag, den 20. Juni 2017, in den Übungen