Hausaufgaben zur Linearen Algebra

1. *(4 Punkte)*

   (a) Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie den *Cosinussatz*

   $$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\|y\| \cos\angle(x,y)$$

   und geben Sie eine geometrische Interpretation.

   (b) Zeigen Sie die *Parallelogramm-Gleichung*

   $$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

   und geben Sie eine geometrische Interpretation.

2. *(6 Punkte)*

   (a) Gegeben sei eine Ebene $E = v + \mathbb{R}w_1 + \mathbb{R}w_2 \subset \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie: Setzt man $a := w_1 \times w_2$ und $b := \langle v, a\rangle$, so gilt

   $$E = \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle x, a\rangle = b\}.$$

   (b) Zeigen Sie, dass für $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ der Betrag von $\langle x \times y, z\rangle$ gleich dem Volumen des von den drei Vektoren aufgespannten Spates (auch Parallelepiped genannt) ist.

3. *(6 Punkte)* Es sei $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ eine Basis eines dreidimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraums V. Dann ist auch $\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3)$ mit $c_1 = b_1 + b_2$, $c_2 = b_1 + b_2 + b_3$ und $c_3 = b_1 - b_2$ eine Basis von V (das ist nicht zu zeigen).

   Man untersuche, ob die folgenden beiden Abbildungen $\phi_i : V \times V \to K$, $i = 1, 2$, bilinear sind. Bei jeder, die es ist, bestimme man $M_{\mathcal{B}}(\phi_i)$, $M_{\mathcal{C}}(\phi_i)$ und $\phi_i(a_1, a_2)$ für $a_1 = 2c_1 - 3c_3$, $a_2 = c_1 - c_2 - c_3$.

   $$\begin{aligned}
   \phi_1\Big(\sum_{j=1}^{3} x_j b_j, \sum_{k=1}^{3} y_k b_k\Big) &= x_1x_2 + x_1y_1 + y_1y_2 + x_1y_3,\\
   \phi_2\Big(\sum_{j=1}^{3} x_j b_j, \sum_{k=1}^{3} y_k b_k\Big) &= 2x_1y_3 + x_1y_2 + x_1y_1 + 2y_1x_3 - x_2y_1.
   \end{aligned}$$

4. *(4 Punkte)* Gegeben seien die beiden Linearformen

   $$\begin{aligned}
   \varphi_1 : \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}\\
   (x, y, z, w) &\longmapsto 2x + 3y + z
   \end{aligned}$$

   und

   $$\begin{aligned}
   \varphi_2 : \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}\\
   (x, y, z, w) &\longmapsto x + 2y + 4z + w
   \end{aligned}$$

   Zeigen Sie, dass durch $(u, v) \mapsto \varphi_1(u) \cdot \varphi_2(v)$ eine Bilinearform auf $\mathbb{R}^4$ gegeben ist und berechnen Sie deren darstellende Matrix bezüglich der Standardbasis.

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Hausaufgaben- und Übungsblätter, etc.) sind unter

`https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/LinAlg2-WS1617/linalg2.php`

zu finden.

Abgabe bis Dienstag, den 16. Mai 2017, in den Übungen