Hausaufgaben zur Linearen Algebra

1. *(4 Punkte)* Welche der Matrizen

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

ist ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix, welche zu einer Diagonalmatrix (jeweils mit Einträgen aus $\mathbb{R}$) ? Geben Sie im Falle von Ähnlichkeit die Basiswechselmatrizen an.

2. *(4 Punkte)*

   (a) Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und F ein Endomorphismus von V. Zeigen Sie, dass F ein Isomorphismus ist genau dann, wenn 0 keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $P_F(t)$ ist.

   (b) Seien A, B Matrizen aus $\mathrm{M}(5 \times 5, \mathbb{R})$ und

$$\begin{aligned} P_A(t) &= -2t^5 + 2t^3 + 13t^2 + 7 \\ P_B(t) &= t^5 + 3t^4 + t^3 - 10t^2 - 2t \end{aligned}$$

   ihre charakteristischen Polynome. Bestimmen Sie die Dimension des Kerns des durch die Matrix $A \cdot B$ beschriebenen Endomorphismus von $\mathbb{R}^5$.

3. *(2 Punkte)* Sei

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und sei $F_A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ der durch A gegebene Endomorphismus von $\mathbb{C}^3$. Finden Sie eine F_A-invariante Fahne von $\mathbb{C}^3$.

4. *(2 Punkte)* Sei $F : V \to V$ ein Endomorphismus und $P \in K[t]$. Zeigen Sie: Ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert von F, so ist $P(\lambda)$ ein Eigenwert von $P(F)$.

5. *(3 Punkte)* Zeige mit Induktion über $n = \dim V$: Ist V ein endlich K-Vektorraum und $F : V \to V$ ein nilpotenter Endomorphismus, so existiert eine Basis $\mathcal{B}$ von V, mit

$$M_{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

6. *(5 points)* Let V be a finite dimensional vector space over $\mathbb{R}$, and let $A : V \to V$ be an $\mathbb{R}$-linear map such that $A^2 = -\mathrm{id}_V$. Show that $\dim V$ is even.

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Hausaufgaben- und Übungsblätter, etc.) sind unter

`https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/LinAlg2-WS1617/linalg2.php`

zu finden.

Abgabe bis Dienstag, den 25. April 2017, in den Übungen