TU Chemnitz, Fakultät für Mathematik
Christian Sevenheck, Thomas Jahn

Übung 12

A12.1. Wir betrachten den komplexen Vektorraum $\mathbb{C}[t]_{\leq 5}$. Zeigen Sie, dass die beiden darstellenden Matrizen der Ableitungsabbildung $D : \mathbb{C}[t]_{\leq 5} \to \mathbb{C}[t]_{\leq 5}$, $\sum_{j=0}^{5} \alpha_j t^j \mapsto \sum_{j=1}^{5} j\alpha_j t^{j-1}$ und der Verschiebungsabbildung $V : \mathbb{C}[t]_{\leq 5} \to \mathbb{C}[t]_{\leq 5}$, $\sum_{j=0}^{5} \alpha_j t^j \mapsto \sum_{j=0}^{5} \alpha_j (t-1)^j$, bezüglich beliebiger Basen von $\mathbb{C}[t]_{\leq 5}$ kommutieren, d.h., dass für eine beliebige Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{C}[t]_{\leq 5}$ gilt $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(D) M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(V) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(V) M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(D)$.

A12.2. Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum mit Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$. Zeigen Sie, dass für einen Endomorphismus $\varphi : V \to V$ die Gleichung $\operatorname{Tr}(M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\varphi)) = \operatorname{Tr}(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi))$ gilt.

A12.3. (a) Sind die Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} d & c \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$ $(a, b, c, d \in \mathbb{C})$ äquivalent oder sogar ähnlich?
(b) Bestimmen Sie alle zu $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ähnlichen Matrizen aus $\mathrm{M}(2 \times 2, \mathbb{R})$!
(c) Sind die Matrizen $A = \left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$ und $B = \left(\begin{smallmatrix} a+ib & 0 \\ 0 & a-ib \end{smallmatrix}\right)$ aus $\mathrm{M}(2 \times 2, \mathbb{C})$ ähnlich $(a, b \in \mathbb{R})$?

A12.4. Seien $A \in \mathrm{M}(m \times r, K)$, $B \in \mathrm{M}(r \times n, K)$ Matrizen mit Einträgen ein einem Körper K. Zeigen Sie, dass $\operatorname{rk}(AB) \leq \min\{\operatorname{rk}(A), \operatorname{rk}(B)\}$ gilt.

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Aufgabenblätter, etc.) sind unter

`https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/LinAlg1-WS1920/linalg1.php`

zu finden.