Lineare Algebra I **TU Chemnitz, Fakultät für Mathematik**
Wintersemester 2019/2020 Christian Sevenheck, Thomas Jahn
Ausgabe: 07.01.2020

Übung 11

A11.1. Man bestimme den Rang folgender (reeller) Matrizen.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

A11.2. Geben Sie für folgende (reelle) Matrizen $A_1, \ldots, A_4$ eine Basis in $\ker(A_i)$ und $\mathrm{Im}(A_i)$ an:

(a) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{pmatrix}$ $(a, b \in \mathbb{R} \setminus \{1\})$,

(c) $A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

A11.3. Sei k ein Körper und $A \in \mathrm{M}(m \times n, K)$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) Es ist $\mathrm{rk}(A) = r \geq 1$.
(b) Es gibt linear unabhängige Familien von Spaltenvektoren $(x_1, \ldots, x_r)$ in K^m und $(y_1, \ldots, y_r)$ in K^n mit $A = \sum_{k=1}^r x_k \, {}^t y_k$.
(c) Es gibt Matrizen $X \in \mathrm{M}(m \times r, K)$ und $Y \in \mathrm{M}(r \times n, K)$ mit $\mathrm{rk}(X) = \mathrm{rk}(Y) = r$ und $A = XY$.

A11.4. Mit

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

bezeichnen wir das *Kronecker-Symbol*. Nun betrachten wir folgende spezielle Matrizen:

$U_n = (\delta_{i,j+1})_{i,j=0}^{n-1}$ (Verschiebungsmatrix), $J_n = (\delta_{i,n-1-j})_{i,j=0}^{n-1}$ (Flipmatrix),
$T_n = (t_{i-j})_{i,j=0}^{n-1}$ (Toeplitzmatrix), $H_n = (h_{i+j})_{i,j=0}^{n-1}$ (Hankelmatrix).

Dabei seien $t_{1-n}, \ldots, t_{n-1}$ und $h_0, \ldots, h_{2n-2}$ irgendwelche Elemente eines Körpers.

(a) Zeigen Sie, dass $H_n = {}^t H_n$, $J_n^2 = I_n$, $J_n T_n J_n = {}^t T_n$ gilt.
(b) Bestimmen Sie für die Matrizen $T_n U_n - U_n T_n$ $H_n U_n - {}^t U_n H_n$ den Rang sowie eine Rangzerlegung.

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Aufgabenblätter, etc.) sind unter

`https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/LinAlg1-WS1920/linalg1.php`

zu finden.