Übung 9

A9.1. Untersuchen Sie, ob folgende Abbildungen linear sind:

(a) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1$, $A(x, y, z) = x + 2y + 3z$,
(b) $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $A(x, y) = (x + y, x - y)$,
(c) $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $A(x_i)_{i=1}^n = (|x_i|)_{i=1}^n$,
(d) $A : K[t] \to K[t]$, $A(f)(t) = tf(t)$,
(e) $A : \mathbb{R}[t]_{\leq n} \to \mathbb{R}[t]_{\leq 2n}$, $A(f)(t) = f(t^2)$,
(f) $A : K[t] \to K[t]$, $A(f)(t) = f(2t + 4)$,
(g) $A : \mathbb{R}[t]_{\leq n} \to \mathbb{R}[t]_{\leq n}$, $A(f)(t) = f'(t)$,
(h) $A : \mathrm{Abb}([0, 1], \mathbb{R}) \to \mathrm{Abb}([0, 1], \mathbb{R})$, $A(f)(t) = f(0)$,
(i) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $A(x, y, z) = a$ für ein gegebenes Element $a \in \mathbb{R}^3$,
(j) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $A(x, y, z) = (x, y, z) + a$ für ein gegebenes Element $a \in \mathbb{R}^3$,
(k) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1$, $A(x, y, z) = x^2 + 2y$,
(l) $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $A(x_i)_{i=1}^n = (\sum_{i=1}^n a_i x_i, 0, \ldots, 0)$ für gegebene Zahlen $a_i \in \mathbb{R}$.

A9.2. Welche der Abbildungen aus Aufgabe 9.1 sind Vektorraumisomorphismen?

A9.3. Eine Matrix $A \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$ heißt *symmetrisch*, falls $A = {}^tA$. Die Matrix A heißt *schiefsymmetrisch* (*alternierend*), falls $A = -{}^tA$.

(a) Zeigen Sie, dass die symmetrischen Matrizen einen Untervektorraum $\mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ von $\mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$ bilden. Geben Sie die Dimension und eine Basis von $\mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ an.
(b) Zeigen Sie, dass die schiefsymmetrischen Matrizen einen Untervektorraum $\mathrm{Alt}(n, \mathbb{R})$ von $\mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$ bilden. Bestimmen Sie auch für $\mathrm{Alt}(n, \mathbb{R})$ die Dimension und eine Basis.
(c) Für $A \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$ sei $A_s := \frac{1}{2}(A + {}^tA)$ und $A_a := \frac{1}{2}(A - {}^tA)$. Zeigen Sie: A_s ist symmetrisch, A_a ist schiefsymmetrisch und es gilt $A = A_s + A_a$.
(d) Es gilt: $\mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R}) = \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R}) \oplus \mathrm{Alt}(n, \mathbb{R})$.

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Aufgabenblätter, etc.) sind unter

`https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/LinAlg1-WS1920/linalg1.php`

zu finden.