

## Übung 5

**A5.1.** Zeigen Sie, dass die vierten Einheitswurzeln (d. h. die (komplexen) Lösungen von  $z^4 = 1$ ) eine zyklische Gruppe der Ordnung 4 bezüglich der Multiplikation bilden!

- (a) Geben Sie alle erzeugenden Elemente an!
- (b) Geben Sie alle Untergruppen und deren erzeugende Elemente an!

**A5.2.** Geben Sie die Gruppentafel der Diedergruppe  $D_4$  des Quadrates an und zeigen Sie, dass  $D_4$  isomorph zu einer Untergruppe der  $S_4$  ist.

**A5.3.** Wir erklären auf der Menge  $M(2 \times 2, \mathbb{R})$  von  $2 \times 2$ -Matrizen die folgenden Operationen:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} &:= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} &:= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- (a) Zeigen Sie, dass  $(M(2 \times 2, \mathbb{R}), +, \cdot)$  einen Ring mit Einselement bildet. Zeigen Sie, dass dieser nicht nullteilerfrei ist!
- (b) Zeigen Sie, dass die Menge der oberen Dreiecksmatrizen

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \subset M(2 \times 2, \mathbb{R})$$

einen Unterring von  $M(2 \times 2, \mathbb{R})$  bilden!

- (c) Zeige, dass die Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} \subset M(2 \times 2, \mathbb{R})$$

mit der oben definierten Addition und Multiplikation einen Ring mit Einselement bildet.

**A5.4.** Show that the ring  $\mathbb{R}[x]$  has no zero divisors. Such rings are called integral domains („nullteilerfreie Ringe“).

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Aufgabenblätter, etc.) sind unter

<https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/LinAlg1-WS1920/linalg1.php>

zu finden.