Lineare Algebra I | **TU Chemnitz, Fakultät für Mathematik**
Wintersemester 2019/2020 | Christian Sevenheck, Thomas Jahn
Ausgabe: 05.11.2019

Übung 4

A4.1. Es seien die Gruppen $G_1 = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ und $G_2 = (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}_{>0}$, $x \mapsto |x|$, ein surjektiver Gruppenhomomorphismus ist.

A4.2. Zeigen Sie, dass die primen Restklassen, also die Menge aller Restklassen modulo n, deren Repräsentanten zu n teilerfremd sind,

(a) modulo 8, (b) modulo 12, (c) modulo 5,

abelsche Gruppen bezüglich der Multiplikation bilden und geben Sie isomorphe Strukturen an.

A4.3. Sei $\mathbb{R}[x]_{\leq 1} = \{f(x) = ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ die Menge der Polynome vom Grad höchstens eins mit reellen Koeffizienten, versehen mit der binären Operation $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ (Komposition).

(a) Ist $(\mathbb{R}[x]_{\leq 1}, \circ)$ eine Gruppe?
(b) Zeigen Sie, dass $P_0 := \{f(x) = ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ mit der Komposition $\circ$ eine abelsche Gruppe bildet.
(c) Ist $(P_1, \circ)$ mit $P_1 = \{f \in P_0 \mid f(1) = 1\}$ eine Untergruppe von $(P_0, \circ)$?

A4.4. Sei X eine Menge und $(G, \cdot)$ eine Gruppe mit neutralem Element e. Unter einer *Gruppenoperation* oder *-wirkung* von G auf X verstehen wir eine Abbildung $\Phi : G \times X \to X$ mit den Eigenschaften $\Phi(g \cdot h, x) = \Phi(g, \Phi(h, x))$ und $\Phi(e, x) = x$ für alle $g, h \in G$ und $x \in X$. Oft unterdrückt man die Abbildungen Φ und $\cdot$ in der Notation und schreibt nur gx für $\Phi(g, x)$. Die definierenden Bedingungen für die Gruppenwirkung heißen dann $(gh)x = g(hx)$ und $ex = x$ für alle $g, h \in G$ und $x \in X$. Die Teilmenge Gx von X aus den Elementen der Form gx mit $g \in G$ wird *Bahn von x unter G* genannt.

(a) Zeigen Sie, dass $x \sim_G y :\Leftrightarrow x \in Gy$ eine Äquivalenzrelation auf X definiert. Die Menge der Äquivalenzklassen heißt *Bahnenraum*.
(b) Zeige, dass S_n auf $\{1, \ldots, n\}$ vermöge $(\sigma, k) \mapsto \sigma(k)$ operiert. (Sprich: $G = S_n$ and $X = \{1, \ldots, n\}$.) Beschreibe die Bahnen und den Bahnenraum.
(c) Betrachte die Abbildung $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot) \times \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $(r, (x, y)) \mapsto (rx, ry)$.
  (i) Definiert das eine Gruppenwirkung? Was sind die Bahnen?
  (ii) Zeigen Sie, dass es eine Bijektion vom Intervall $[0, \pi) \subset \mathbb{R}$ in den Bahnenraum gibt. (Betrachten Sie dazu die Abbildung $[0, \pi) \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$.)

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Aufgabenblätter, etc.) sind unter

`https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/LinAlg1-WS1920/linalg1.php`

zu finden.