Lineare Algebra I
Wintersemester 2019/2020
Ausgabe: 29.10.2019

TU Chemnitz, Fakultät für Mathematik
Christian Sevenheck, Thomas Jahn

Übung 3

A3.1. Ein Konferenzhotel für Mathematiker hat genau $\aleph_0$ Betten.[1] Das Hotel ist bereits voll belegt, aber die Mathematiker lassen sich nach Belieben innerhalb des Hotels umquartieren. Das Hotel soll aus wirtschaftlichen Gründen stets voll belegt sein, und wenn möglich sollen alle neu ankommenden Gäste untergebracht werden. Was macht man in den folgenden Fällen?

(a) Ein weiterer Mathematiker trifft ein.
(b) Die Passagiere eines Kleinbusses, d. h., eines Busses mit n Plätzen, suchen Unterkunft.
(c) Ein Großraumbus, also ein Bus mit mit $\aleph_0$ Personen, kommt an.
(d) Es treffen n Großraumbusse ein.
(e) Es fahren $\aleph_0$ Großraumbusse vor.

A3.2. Geben Sie eine Bijektion zwischen den Mengen $[a, b]$ und $[c, d]$ an, wobei $a < b$ und $c < d$!

A3.3. Zeigen Sie mithilfe der vollständigen Induktion die Gültigkeit der folgenden Aussagen für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

(a) $2^n > n$,

(b) $\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ mit $a \neq 1$.

A3.4. Zeigen Sie die Bernoullische Ungleichung: Für jedes $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, gilt $(1 + x)^n > 1 + nx$ für alle $x > -1$, $x \neq 0$.

A3.5. Zeigen Sie, dass jede nichtleere Teilmenge der natürlichen Zahlen ein kleinstes Element besitzt.

A3.6. Zeigen Sie, dass jede natürliche Zahl größer oder gleich 2 als Produkt von Primzahlen darstellbar ist.

A3.7. Zeigen Sie, dass die Menge M von Funktionen $f_i : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, gegeben durch $f_1(t) = t$, $f_2(t) = \frac{1}{t}$, $f_3(t) = -t$, $f_4(t) = -\frac{1}{t}$ bezüglich der Komposition eine abelsche Gruppe der Ordnung 4 bildet.

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Aufgabenblätter, etc.) sind unter

`https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/LinAlg1-WS1920/linalg1.php`

zu finden.

[1] Mit $\aleph_0$ bezeichnen wir die Mächtigkeit der natürlichen Zahlen, sprich: Es gibt genauso viele Plätze, wie es natürliche Zahlen gibt, also können wir die verfügbaren Plätze mit natürlichen Zahlen durchnummerieren.