Lineare Algebra I
Wintersemester 2019/2020
Ausgabe: 15.10.2019

TU Chemnitz, Fakultät für Mathematik
Christian Sevenheck, Thomas Jahn

Übung 1

A1.1. Machen Sie den Nenner rational:

(a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$, (b) $\frac{1}{\sqrt{3}+2}$, (c) $\frac{1}{2\sqrt{7}+\sqrt{5}}$.

A1.2. Vereinfachen Sie:

(a) $\frac{16-49m^2}{16-28m}$ (b) $\frac{x^2-4y^2}{x^2-4xy+4y^2}$ (c) $\frac{a}{a^2-2ab+b^2} - \frac{a}{a^2-b^2} + \frac{1}{a+b}$

(d) $\frac{\frac{a+1}{a-1}-1}{\frac{a+1}{a-1}+1}$ (e) $\frac{\frac{1}{y^2}+\frac{2}{xy}+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{y^2}-\left(\frac{1}{x}\right)^2}$ (f) $\left(\frac{b^{-5}x^2}{a^{-6}y^{-4}}\right)^4 \cdot \left(\frac{a^4b^{-3}}{x^{-1}y^{-2}}\right)^{-6}$

(g) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$

A1.3. Dividieren Sie:

(a) $(21a^3 - 34a^2b + 25b^3) : (7a+5b)$, (b) $(9x^3 + 2y^3 - 7xy^2) : (3x - 2y)$.

A1.4. Geben Sie zu folgenden Ausdrücken die quadratische Ergänzung an

(a) $x^2 + 6x$, (b) $z^2 - \frac{10}{7}z$, (c) $\frac{16}{49}t^2 - \frac{16}{21}t$

und leiten Sie die Lösungsformel für quadratische Gleichungen her!

A1.5. Wir wollen den Wert eines Polynoms vierten Grades $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ in einem Punkt x_0 ermitteln. Welche der folgenden Berechnungsvarianten ist günstiger?

- $p(x_0) = ax_0^4 + bx_0^3 + cx_0^2 + dx_0 + e$,
- $p(x_0) = (((ax_0 + b)x_0 + c)x_0 + d)x_0 + e$.

Erproben Sie das Schema an den Beispielen $3x^4 + 2x - 1$, $x_0 = -1$ und $2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$, $x_0 = \frac{1}{2}$.

A1.6. Lösen Sie folgende homogene Gleichungssysteme mithilfe des Gaußschen Algorithmus.

(a) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$ (c) $x_1 + x_2 + x_3 = 0$

(d) $\begin{cases} -2x + 4y + z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \\ 3x - y + 4z = 0 \\ x + 3y - 4z = 0 \end{cases}$

A1.7. Man bestimme die Lösungen des folgenden Gleichungssystems in Abhängigkeit von λ:

$$\begin{cases} x + y + \lambda z = 0 \\ x - \lambda y + z = 0 \\ \lambda x - y + z = 0 \end{cases}$$

A1.8. Lösen Sie folgende inhomogene Gleichungssysteme mithilfe des Gaußschen Algorithmus.

(a) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 8 \\ 15x_1 + 10x_2 = 40 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + z = 0 \\ 5x - y + 3z = 1 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 6x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 1 \\ 4x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 2 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \\ 3x - y + 3z = \lambda \end{cases}$ (f) $\begin{cases} x + y + \lambda z = 1 \\ x + \lambda y + z = 1 \\ \lambda x + y + z = 1 \end{cases}$

A1.9. Geben Sie folgende Mengen mithilfe ihrer Grundmenge und der Eigenschaft ihrer Elemente an:

$$M_1 = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}, \qquad M_2 = \{1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$$
$$M_3 = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}, \qquad M_4 = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}\frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \ldots\right\},$$
$$M_5 = \{-1, 1\}, \qquad M_6 = (c, d].$$

Begleitend zur Vorlesung wird es jede Woche ein Übungsblatt sowie ein Hausaufgabenblatt geben. Das Übungsblatt sollen Sie unter Anleitung in der Übung lösen, das Hausaufgabenblatt soll bis zur nächsten Woche selbstständig bearbeitet werden. Natürlich können und sollen Sie sich dabei mit Ihren Kommilitonen austauschen. Die Bearbeitung der Hausaufgaben und der Übungen ist integraler Bestandteil der Vorlesung und zum Bestehen der Prüfung unerlässlich. Eine formale Voraussetzung, um an der Prüfung teilnehmen zu können, ist, dass Sie bei den Hausaufgaben mindestens 40% der Punkte erreicht haben.
Die Hausaufgaben werden korrigiert und die Lösungen werden, soweit dafür Erklärungsbedarf besteht, jeweils einmal pro Woche in den Übungen besprochen. Dabei sollen die Lösungen, soweit dies möglich ist, hauptsächlich von Ihnen selbst an der Tafel vorgerechnet werden. Dies hilft Ihnen die gefundene Lösung noch einmal zu durchdenken und trainiert Sie dabei Ihre Ideen auch vor Publikum vorzutragen.

Bei jeglichen Fragen zur Vorlesung (Stoff, Übungen, Organisatorisches, etc.) können Sie uns jederzeit per E-Mail unter

{christian.sevenheck, thomas.jahn}@mathematik.tu-chemnitz.de

erreichen. Nach Terminvereinbarung sind wir natürlich auch persönlich zu sprechen.

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Aufgabenblätter, etc.) sind unter

`https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/LinAlg1-WS1920/linalg1.php`

zu finden.