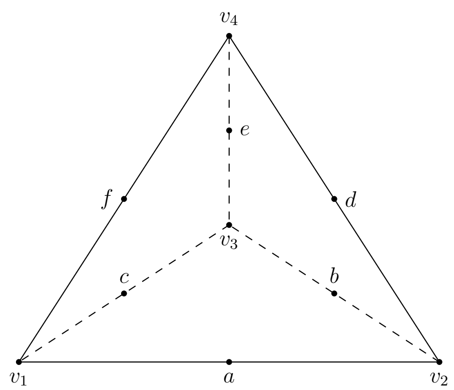
Lineare Algebra I | **TU Chemnitz, Fakultät für Mathematik**
Wintersemester 2019/2020 | Christian Sevenheck, Thomas Jahn
Ausgabe: 21.01.2020

Hausaufgabe 13

HA13.1 (5 Punkte)**.** (a) Berechnen Sie die Verknüpfungstabelle von S_3.
(b) Stellen Sie die folgenden Permutationen aus S_6 als Produkt von Transpositionen dar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

HA13.2 (6 Punkte)**.** Wir betrachten die Elemente der alternierenden Gruppe $A_4 < S_4$. Diese können wir als Symmetrieabbildungen eines gleichseitigen Tetraeders T im $\mathbb{R}^3$ auffassen, genauer gesagt durch Achsendrehungen. Dazu sei der Mittelpunkt des Tetraeders 0, die Ecken v_1, v_2, v_3, v_4 und Kantenmittelpunkte a, b, c, d, e, f wie in der Skizze.



Beispiel: Das Element

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in A_4$$

wird durch eine Drehung an der Achse $\vec{ae}$ um den Winkel π realisiert, weil diese die Ecke v_i auf $v_{\sigma(i)}$ abbildet, für alle $i \in \{1, \dots, 4\}$.
Schreiben Sie für die anderen Elemente von A_4 die zugehörige Achsendrehung durch Angabe der Drehachse und des Drehwinkels auf.

HA13.3 (3 Punkte)**.** Show the following identity:

$$\det \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha)\cos(\beta) & \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\cos(\beta) & \cos(\alpha)\sin(\beta) \\ 0 & -\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} = 1.$$

HA13.4 (6 Punkte)**.** (a) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

invertierbar?
(b) Für welche $\mu, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} \mu & \mu & \mu & \mu & \mu \\ 1 & \mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i} & 1 \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 & \lambda_1^4 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \lambda_2^3 & \lambda_2^4 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \lambda_3^3 & \lambda_3^4 \end{pmatrix}$$

invertierbar?

(c) Beweisen Sie, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} x^{10} + 14x^9 + 7x^3 & 12x^9 + 4x^3 + 3x + 1 & 44x^7 - 3\mathrm{i}x^5 - 6\mathrm{i} \\ x^9 + x^5 - 213x^2 & 97x^{10} & 3x - 1255 \\ x^5 + x^4 - x^3 - x^2 - x + 1 & 99 & 111x^{10} - x^9 + 13x^5 - 8 \end{pmatrix}$$

für höchstens 30 verschiedene Werte von $x \in \mathbb{C}$ nicht invertierbar ist.

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Aufgabenblätter, etc.) sind unter

`https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/LinAlg1-WS1920/linalg1.php`

zu finden.

Abgabe bis 28.01.2020 in der Übung.