

## Hausaufgabe 12

**HA12.1** (5 Punkte). (a) Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} -10 & 4 & 12 \\ -5 & 11 & 3 \\ -15 & 3 & 19 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -9 & 2 & 11 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -7 & 2 & 15 \\ -5 & 1 & 2 & -9 \\ -1 & -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Invertieren Sie die folgenden Matrizen oder begründen Sie die Nichtinvertierbarkeit:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -10 & 4 & 12 \\ -5 & 11 & 3 \\ -15 & 3 & 19 \end{pmatrix}.$$

**HA12.2** (5 Punkte). Sei wie in HA11.1 die Matrix

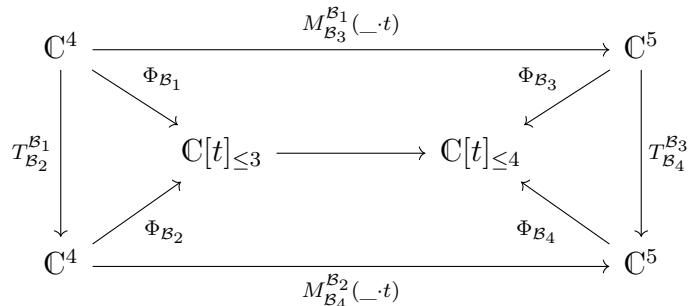
$$M := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 & 8 \end{pmatrix} \in M(3 \times 4, \mathbb{R})$$

gegeben, welche eine lineare Abbildung  $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3, x \mapsto Mx$  definiert. Finden Sie Basen  $\mathcal{A}'$  von  $\mathbb{R}^4$  und  $\mathcal{B}'$  von  $\mathbb{R}^3$ , bezüglich derer die Abbildung  $\varphi$  durch die Matrix

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{A}'}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

**HA12.3** (5 Punkte). Consider the map  $\_ \cdot t : \mathbb{C}[t]_{\leq 3} \rightarrow \mathbb{C}[t]_{\leq 4}, p \mapsto p \cdot t$ , and the bases  $\mathcal{B}_1 := (1, t, t^2, t^3, t^3)$  and  $\mathcal{B}_2 := (1, t + 1, (t - 2)^2, t^3 + t)$  of the complex vector space  $\mathbb{C}[t]_{\leq 3}$  as well as the bases  $\mathcal{B}_3 := (1, t, t^2 + t + 1, (t + 1)^3, t^4 + t^2)$  and  $\mathcal{B}_4 := (1, t, t^2, t^3, t^4)$  of  $\mathbb{C}[t]_{\leq 4}$ . Compute all matrices and maps occurring in the following diagram.



**HA12.4** (5 Punkte). (a) Wir betrachten erneut die folgenden zwei Endomorphismen des  $\mathbb{C}$ -Vektorraumes  $\mathbb{C}[t]$ :  $D : \mathbb{C}[t] \rightarrow \mathbb{C}[t], p \mapsto p'$ , und  $\_ \cdot t : \mathbb{C}[t] \rightarrow \mathbb{C}[t], p \mapsto p \cdot t$ . Zeigen Sie, dass  $D \circ (\_ \cdot t) - (\_ \cdot t) \circ D = \text{id}_{\mathbb{C}[t]}$  gilt.

- (b) Sei nun  $V$  ein beliebiger  $\mathbb{C}$ -Vektorraum und  $P, Q$  Endomorphismen von  $V$ . Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$P \circ Q - Q \circ P = \text{id}_V$$

nur gelten kann, falls  $\dim_{\mathbb{C}}(V) = \infty$  ist. (Hinweis: Sie können HA11.3 verwenden.)

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Aufgabenblätter, etc.) sind unter

<https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/LinAlg1-WS1920/linalg1.php>

zu finden.

**Abgabe bis 21.01.2020 in der Übung.**