Lineare Algebra I — **TU Chemnitz, Fakultät für Mathematik**
Wintersemester 2019/2020 — Christian Sevenheck, Thomas Jahn
Ausgabe: 14.01.2020

Hausaufgabe 12

HA12.1 (5 Punkte)**.** (a) Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} -10 & 4 & 12 \\ -5 & 11 & 3 \\ -15 & 3 & 19 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -9 & 2 & 11 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3 & -7 & 2 & 15 \\ -5 & 1 & 2 & -9 \\ -1 & -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Invertieren Sie die folgenden Matrizen oder begründen Sie die Nichtinvertierbarkeit:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -10 & 4 & 12 \\ -5 & 11 & 3 \\ -15 & 3 & 19 \end{pmatrix}.$$

HA12.2 (5 Punkte)**.** Sei wie in HA11.1 die Matrix

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 & 8 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3 \times 4, \mathbb{R})$$

gegeben, welche eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, x \mapsto Mx$ definiert. Finden Sie Basen $\mathcal{A}'$ von $\mathbb{R}^4$ und $\mathcal{B}'$ von $\mathbb{R}^3$, bezüglich derer die Abbildung φ durch die Matrix

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{A}'}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

HA12.3 (5 Punkte)**.** Consider the map $\_ \cdot t : \mathbb{C}[t]_{\leq 3} \to \mathbb{C}[t]_{\leq 4}$, $p \mapsto p \cdot t$, and the bases $\mathcal{B}_1 := (1, t, t^2, t^3, t^3)$ and $\mathcal{B}_2 := (1, t+1, (t-2)^2, t^3 + t)$ of the complex vector space $\mathbb{C}[t]_{\leq 3}$ as well as the bases $\mathcal{B}_3 := (1, t, t^2 + t + 1, (t+1)^3, t^4 + t^2)$ and $\mathcal{B}_4 := (1, t, t^2, t^3, t^4)$ of $\mathbb{C}[t]_{\leq 4}$. Compute all matrices and maps occuring in the following diagram.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^4 \arrow[rrr, "M_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}_1}(_\cdot t)"] \arrow[dr, "\Phi_{\mathcal{B}_1}"] \arrow[dd, "T_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}"'] & & & \mathbb{C}^5 \arrow[dl, "\Phi_{\mathcal{B}_3}"'] \arrow[dd, "T_{\mathcal{B}_4}^{\mathcal{B}_3}"] \\
& \mathbb{C}[t]_{\leq 3} \arrow[r] & \mathbb{C}[t]_{\leq 4} & \\
\mathbb{C}^4 \arrow[rrr, "M_{\mathcal{B}_4}^{\mathcal{B}_2}(_\cdot t)"'] \arrow[ur, "\Phi_{\mathcal{B}_2}"'] & & & \mathbb{C}^5 \arrow[ul, "\Phi_{\mathcal{B}_4}"]
\end{tikzcd}$$

HA12.4 (5 Punkte)**.** (a) Wir betrachten erneut die folgenden zwei Endomorphismen des $\mathbb{C}$-Vektorraumes $\mathbb{C}[t]$: $D : \mathbb{C}[t] \to \mathbb{C}[t]$, $p \mapsto p'$, und $\_ \cdot t : \mathbb{C}[t] \to \mathbb{C}[t]$, $p \mapsto p \cdot t$. Zeigen Sie, dass $D \circ (\_ \cdot t) - (\_ \cdot t) \circ D = \mathrm{id}_{\mathbb{C}[t]}$ gilt.

(b) Sei nun V ein beliebiger $\mathbb{C}$-Vektorraum und P, Q Endomorphismen von V. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$P \circ Q - Q \circ P = \mathrm{id}_V$$

nur gelten kann, falls $\dim_{\mathbb{C}}(V) = \infty$ ist. (Hinweis: Sie können HA11.3 verwenden.)

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Aufgabenblätter, etc.) sind unter

`https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/LinAlg1-WS1920/linalg1.php`

zu finden.

Abgabe bis 21.01.2020 in der Übung.