Hausaufgabe 11

HA11.1 (3 Punkte)**.** Die Matrix

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

definiert eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, M ist die Darstellung von φ bezüglich der Standardbasen von $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie die Matrix $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ bezüglich der Basen $\mathcal{A} := (g_1, g_2, g_3, g_4)$ von $\mathbb{R}^4$ und $\mathcal{B} := (h_1, h_2, h_3)$ von $\mathbb{R}^3$ mit

$$g_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad g_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad g_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad g_4 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und

$$h_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad h_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad h_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

HA11.2 (6 Punkte)**.** Wir betrachten den komplexen Vektorraum $\mathbb{C}[t]_{\leq 5}$ der komplexen Polynome vom Grad kleiner oder gleich fünf und die Basis $\mathcal{B}_0 = (1, t, t^2, t^3, t^4, t^5)$ von $\mathbb{C}[t]_{\leq 5}$.

(a) Wie kann man am Koordinatenvektor eines Polynoms $p \in \mathbb{C}[t]_{\leq 5}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}_0$ die Multiplizität $\mu(p, 0)$ des Polynoms im Punkt 0 ablesen?

(b) Zeigen Sie, dass
$$\mathcal{B}_1 = \left(1, t-1, (t-1)^2, (t-1)^3, (t-1)^4, (t-1)^5\right)$$
eine Basis von $\mathbb{C}[t]_{\leq 5}$ ist. Wie kann man am Koordinatenvektor eines Polynoms $p \in \mathbb{C}[t]_{\leq 5}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}_1$ die Multiplizität $\mu(p, 1)$ des Polynoms im Punkt 1 ablesen?

(c) Bestimmen Sie die Transformationsmatrizen $T^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{B}_0}$ und $T^{\mathcal{B}_0}_{\mathcal{B}_1}$ und bestimmen Sie die Multiplizitäten $\mu(p_1, 1)$ und $\mu(p_2, 1)$ der Polynome $p_1(t) := t^4 - (4+\mathrm{i})t^3 + (5+4\mathrm{i})t^2 - (2+5\mathrm{i})t + 2\mathrm{i}$ und $p_2(t) := t^5 - \frac{9}{2}t^4 + 8t^3 - 7t^2 + 3t - \frac{1}{2}$ im Punkt $t = 1$ durch Matrizenmultiplikation und einfaches Ablesen.

(d) Zeigen Sie, dass die Verschiebungsabbildung V, die in einem Polynom t gegen $t-1$ ersetzt, ein Endomorphismus des Vektorraumes $\mathbb{C}[t]_{\leq 5}$ ist. Berechnen Sie durch Multiplikation und Invertieren von bereits bekannten Matrizen die darstellenden Matrizen $M^{\mathcal{B}_0}_{\mathcal{B}_0}(V)$ und $M^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{B}_1}(V)$ dieses Endomorphismus bezüglich der Basen $\mathcal{B}_0$ und $\mathcal{B}_1$.

HA11.3 (3 Punkte)**.** Let k be any field and let $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(n \times n, k)$ be a quadratic matrix. Define the *trace* of A as
$$\mathrm{Tr}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$
i.e., the trace is the sum of the diagonal elements of A. Show that

(a) $\operatorname{Tr}(E_n) = n$, where E_n is the unit matrix in $\mathrm{M}(n \times n, k)$,
(b) $\operatorname{Tr}(A + B) = \operatorname{Tr}(A) + \operatorname{Tr}(B)$ for all $A, B \in \mathrm{M}(n \times n, k)$,
(c) $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$ for all $A, B \in \mathrm{M}(n \times n, k)$.

HA11.4 (4 Punkte)**.** Let V be a k-vector space and let $F : V \to V$ be an *idempotent* endomorphism of V, i.e., an endomorphism of V satisfying $F^2 = F$. Show that there are linear subspaces U, W of V such that $V = U \oplus W$, $F(w) = 0$ for all $w \in W$ and $F(u) = u$ for all $u \in U$.

HA11.5 (4 Punkte)**.** Sei $\mathbb{F}_p$ ein Körper mit q Elementen.

(a) Wieviele Elemente hat $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)$? (Hinweise: Eine Matrix $A \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{F}_q)$ ist invertierbar, wenn ihre Zeilen $v_i := (a_{i1}, ..., a_{in})$, $i = 1, 2, ..., n$, linear unabhängig sind. Wenn man zuerst v_1 wählt, wieviele Möglichkeiten gibt es dafür? Wieviele Möglichkeiten hat man danach für v_2, danach für $v_3, \ldots$ und am Ende für v_n?)
(b) Geben Sie die Elemente von $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_2)$ an.

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Aufgabenblätter, etc.) sind unter

`https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/LinAlg1-WS1920/linalg1.php`

zu finden.

Abgabe bis 14.01.2020 in der Übung.