Lineare Algebra I
Wintersemester 2019/2020
Ausgabe: 10.12.2019

TU Chemnitz, Fakultät für Mathematik
Christian Sevenheck, Thomas Jahn

Hausaufgabe 9

HA9.1 (2 Punkte)**.** Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass die K-Vektorräume $K[t]_{\leq n}$ und K^{n+1} isomorph sind!

HA9.2 (2 Punkte)**.** Untersuchen Sie, ob die Abbildung $f : \mathbb{C}[t]_{\leq 2} \to \mathbb{C}^3$, $at^2 + bt + c \mapsto (a - c, b - c, a + c)$ ein Vektorraumisomorphismus ist!

HA9.3 (2 Punkte)**.** Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

(a) $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x^2, y)$ über $\mathbb{R}$
(b) $A : \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \to \mathbb{R}$, $a + b\sqrt{2} \mapsto a - b\sqrt{2}$ über $\mathbb{Q}$
(c) $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z + \bar{z}$ über $\mathbb{C}$
(d) $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z + \bar{z}$ über $\mathbb{R}$

HA9.4 (5 Punkte)**.** Let V be a vector space. An endomorphism of V, i.e., a homomorphism $\varphi : V \to V$ is called *nilpotent* if there is $k \in \mathbb{N}$ such that $\varphi^k = 0$. Here we write

$$\varphi^k := \underbrace{\varphi \circ \ldots \circ \varphi}_{k \text{ times}}.$$

Prove that given a nilpotent endomorphism $\varphi : V \to V$, the linear map $\mathrm{id}_V - \varphi$ is an automorphism of V, i.e., a bijective endomorphism. (Hint: Use that $(1-x)(1+x+x^2+\ldots+x^{k-1}) = 1-x^k$.)

HA9.5 (4 Punkte)**.** Seien W_1 und W_2 zwei endlichdimensionale K-Vektorräume. Zeigen Sie, dass das direkte Produkt $V := W_1 \times W_2$ ebenfalls die Struktur eines K-Vektorraums hat. Zeigen Sie außerdem, dass sich V als direkte Summe $V = V_1 \oplus V_2$ von Untervektorräumen V_1 bzw. V_2 schreiben lässt, die zu W_1 bzw. W_2 isomorph sind.

HA9.6 (5 Punkte)**.** Sei $\mathbb{F}_q$ ein Körper mit $q \in \mathbb{N}$ Elementen. Sei $n \in \mathbb{N}$.

(a) Wieviele Elemente hat der Vektorraum $\mathbb{F}_q^n$?
(b) Wieviele Untervektorräume von $\mathbb{F}_q^n$ der Gestalt $\mathrm{Span}_{\mathbb{F}_q}(v)$ mit $v \in \mathbb{F}_q^n \setminus \{0\}$ gibt es? (Hinweise: Wieviele Elemente haben die Mengen $\mathrm{Span}_{\mathbb{F}_q}(v) \setminus \{0\}$? Wie sehen ihre Schnittmengen aus?)

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Aufgabenblätter, etc.) sind unter

`https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/LinAlg1-WS1920/linalg1.php`

zu finden.

Abgabe bis 17.12.2019 in der Übung.