Lineare Algebra I | **TU Chemnitz, Fakultät für Mathematik**
Wintersemester 2019/2020 | Christian Sevenheck, Thomas Jahn
Ausgabe: 03.12.2019

Hausaufgabe 8

HA8.1 (4 Punkte)**.** Seien a, b, c, d beliebige reelle Zahlen. Man zeige,

(a) dass die Menge aller Lösungen $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ des Gleichungssystems

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$$

einen linearen Unterraum des $\mathbb{R}^2$ bildet!

(b) dass die Menge aller Zahlenpaare $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, für die das Gleichungssystem

$$\begin{cases} ax + by = u \\ cx + dy = v \end{cases}$$

eine Lösung $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ hat, einen linearen Unterraum des $\mathbb{R}^2$ bildet!

HA8.2 (6 Punkte)**.** (a) Falls die Familie (a, b, c, d) linear unabhängig ist, welche der folgenden sind es dann auch?

(i) $(a - b, a + b, a + c - d, b + c + d)$
(ii) $(a + 2b + d, 2b + c + d, -a - 2b - c - d, 8a + 4b - c + 2d)$

(b) Wir betrachten den Untervektorraum $\mathbb{R}[X]_{\leq 4}$ von $\mathbb{R}[X]$, der aus den Polynomen vom Grad kleiner oder gleich 4 besteht. Ergänzen Sie die folgenden Familien von Vektoren jeweils mit Vektoren aus $\{1, X, X^2, X^3, X^4\}$ zu einer Basis von $\mathbb{R}[X]_{\leq 4}$.

(i) $(3 + X + 2X^2 + 3X^3 + 5X^4, 1 + 6X + 2X^2 + 3X^4, 4 + 5X^2 + 7X^4)$
(ii) $(1 + 2X^2 + 7X^3 + 3X^4, 1 + X + 8X^2 + 7X^3 + 12X^4, 2 + X + 4X^2 + 14X^3 + 6X^4)$

HA8.3 (5 Punkte)**.** Bestimmen Sie für jeden der folgenden Untervektorräume jeweils eine Basis:

(a) $\operatorname{Span}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 12 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \subset \mathbb{R}^5$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum,

(b) $\operatorname{Span}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ \lambda \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \right) \subset \mathbb{R}^3$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum (in Abhängigkeit von $\lambda \in \mathbb{R}$),

(c) $\operatorname{Span}_{\mathbb{C}} ((5 + \mathrm{i}, \mathrm{i}), (1 - 5\mathrm{i}, 1)) \subset \mathbb{C}^2$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum,

(d) $\operatorname{Span}_{\mathbb{R}} ((5 + \mathrm{i}, \mathrm{i}), (1 - 5\mathrm{i}, 1)) \subset \mathbb{C}^2$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum.

HA8.4 (3 Punkte)**.** Show that a basis $(x_1, \ldots, x_n)$ of $\mathbb{R}^n$ is given by

$$\begin{aligned} x_1 &= (1, 2, 3, \ldots, n), \\ x_2 &= (0, 2, 3, \ldots, n), \\ &\vdots \\ x_n &= (0, 0, \ldots, n). \end{aligned}$$

Write the vector $v = (1, 2^2, 3^2, \ldots, n^2)$ as a linear combination $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$ of the basis vectors.

HA8.5 (2 Punkte)**.** Seien $p_+(t) := 1+t^2, p_-(t) := 1-t^2 \in \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$. Bestimmen Sie die Dimension von

$$U := \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(p_+(t), p_-(t)) \subseteq \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$$

sowie eine Basis von U.

HA8.6 (Zusatzaufgabe: 2 Extrapunkte)**.** Let V be the set of sequences $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ of real numbers, i.e., $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. As a consequence of HA5.3(d), V becomes an $\mathbb{R}$-vector space when we define addition and multiplication by a scalar via $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}} := (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ and $\alpha(x_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\alpha x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, respectively. Show that these operations turn the set W of convergent sequences of real numbers into a vector subspace of V.

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Aufgabenblätter, etc.) sind unter

`https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/LinAlg1-WS1920/linalg1.php`

zu finden.

Abgabe bis 10.12.2019 in der Übung.