Lineare Algebra I **TU Chemnitz, Fakultät für Mathematik**
Wintersemester 2019/2020 Christian Sevenheck, Thomas Jahn
Ausgabe: 26.11.2019

Hausaufgabe 7

HA7.1 (3 Punkte)**.** Let R and S be commutative rings. A mapping $\varphi : R \to S$ is called a ring homomorphism if $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ and $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ holds true for all $a, b \in R$. Prove the following statement: If R is a field, then φ is either the zero homomorphism (i.e., $\varphi(a) = 0_S$ for all $a \in R$) or φ is injective.
(We use the same symbols $+$ and $\cdot$ for the operations in R and S but they do not need to coincide. The symbol 0_S denotes the neutral element of $+$ in S.)

HA7.2 (5 Punkte)**.** Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume der jeweiligen Vektorräume?

(a) $\{(a,b,c) \in \mathbb{C}^3 \mid 2a + 27b = -5c \text{ und } 3a + b = 0\} \subset \mathbb{C}^3$
(b) $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid 3a + 5b + 2ab = 0\} \subset \mathbb{R}^2$
(c) $\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + b \geq c\} \subset \mathbb{R}^3$
(d) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0 \text{ für höchstens endlich viele } x \in \mathbb{R}\} \subset \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
(e) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{Q}\ \forall\, x \in \mathbb{R}\} \subset \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

HA7.3 (2 Punkte)**.** Sei V der $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{Q}^n$ und W der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^n$. Gegeben sei eine linear unabhängige Familie $(v_1, \ldots, v_r)$ von Vektoren aus V, hierbei ist $r \leq n$. Aufgrund der Inklusion $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ sind $v_1, \ldots, v_r$ auch Elemente aus W. Zeigen Sie, dass sie auch in W linear unabhängig sind.

HA7.4 (10 Punkte)**.** (a) Zeigen Sie, dass die folgenden Familien linear unabhängig sind:

(i) $((0,2,1),(1,5,3))$ in $\mathbb{R}^3$,
(ii) $((1,1,0),(1,1,1),(0,1,-1))$ in $\mathbb{R}^3$,
(iii) $((\pi,0),(0,1))$ in $\mathbb{R}^2$.

Welche sind Basen der angegebenen Vektorräume?

(b) Wir betrachten die Menge $V := \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ (siehe Aufgabe 3.4) als Vektorraum über dem Körper $\mathbb{Q}$. Untersuchen Sie die folgenden Familien von Vektoren aus V auf lineare Unabhängigkeit:

(i) $(10, 3+\sqrt{2})$,
(ii) $(6+\sqrt{8}, 3+\sqrt{2})$,
(iii) $(10, 3+\sqrt{32}\cdot\sqrt{2})$.

(c) Seien (a,b) und (c,d) zwei Elemente des Vektorraumes $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass $((a,b),(c,d)$ genau dann linear abhängig ist, wenn $ad - bc = 0$ ist.

(d) Sei V der Vektorraum $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Beweisen Sie, dass die folgenden Paare von Vektoren (f,g) in V jeweils linear unabhängig sind:

(i) $f(x) = x$ und $g(x) = 1$,
(ii) $f(x) = x$ und $g(x) = \sin(x)$,

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Aufgabenblätter, etc.) sind unter

`https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/LinAlg1-WS1920/linalg1.php`

zu finden.

Abgabe bis 03.12.2019 in der Übung.