**Lineare Algebra I**
Wintersemester 2019/2020
Ausgabe: 19.11.2019

**TU Chemnitz, Fakultät für Mathematik**
Christian Sevenheck, Thomas Jahn

# Hausaufgabe 6

**HA6.1** (6 Punkte)**.** (a) Laut Vorlesung ist $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ eine abelsche Gruppe genau dann, wenn $n$ eine Primzahl ist. Nun wollen wir ein analoges Ergebnis für $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ für beliebige $n \in \mathbb{N}$ zeigen. Beweisen Sie:

$$\left\{\bar{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \,\middle|\, \exists\, \bar{b} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} : \bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{1}\right\} = \{\bar{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid 0 < a < n, \mathrm{ggT}(a,n) = 1\}.$$

Hinweis: Benutzen Sie Hausaufgabe 5.4(c).

(b) Zeigen Sie, dass die Menge $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* := \{\bar{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid 0 < a < n, \mathrm{ggT}(a,n) = 1\}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ eine abelsche Gruppe bezüglich der Verknüpfung $\cdot$ ist. Sie heißt die *Einheitengruppe* des Rings $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

**HA6.2** (4 Punkte)**.** Sei $z = a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl. Berechnen Sie alle $w = x + y\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ mit $w^2 = z$. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

(a) Trennen Sie die Gleichung $(x + y\mathrm{i})^2 = a + b\mathrm{i}$ nach Real- und Imaginärteil auf. Dies ergibt zwei Gleichungen für $x$ und $y$.
(b) Substituieren Sie eine Variable (zum Beispiel $y$), dies liefert eine Gleichung vierten Grades in $x$.
(c) Durch eine weitere Substitution erhält man hieraus eine Gleichung zweiten Grades, welche auf einfache Weise lösbar ist.

**HA6.3** (4 Punkte)**.** (a) Determine real part, imaginary part, and absolute value of the complex numbers listed below.

$$z_1 := \frac{1}{\mathrm{i}}, \quad z_2 := -\frac{1-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}} - \frac{3+\mathrm{i}}{4}, \quad z_3 := 3\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/8}.$$

(b) Determine the absolute value and the argument (i.e, $|z| \geq 0$ and $\alpha \in [0, 2\pi)$ such that $z = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = |z|\,(\cos(\alpha) + \mathrm{i}\sin(\alpha)))$ of the complex number $z_4 := (\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2})^{19}$.

**HA6.4** (3 Punkte)**.** Calculate all zeros of the polynomial $f = x^5 - 3x^2 - 64x - 24$. Hint: You have to divide $f$ by $x^2 + 8$.

**HA6.5** (3 Punkte)**.** In der Menge aller positiven reellen Zahlen $\mathbb{R}_+$ wird wie folgt eine Addition und eine Multiplikation mit Skalaren aus $\mathbb{R}$ eingeführt: Für alle $x, y \in \mathbb{R}_+$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $x \oplus y := xy$ und $\alpha \odot x := x^\alpha$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}_+$ auf diese Weise zu einem $\mathbb{R}$-Vektorraum wird.

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Aufgabenblätter, etc.) sind unter

`https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/LinAlg1-WS1920/linalg1.php`

zu finden.

**Abgabe bis 26.11.2019 in der Übung.**