Lineare Algebra I
Wintersemester 2019/2020
Ausgabe: 12.11.2019

TU Chemnitz, Fakultät für Mathematik
Christian Sevenheck, Thomas Jahn

Hausaufgabe 5

HA5.1 (8 Punkte)**.** (a) Sei G eine Gruppe und

$$\mathrm{Aut}(G) := \{f : G \to G \text{ Gruppenisomorphismus}\}$$

die Menge der *Automorphismen von* G. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Aut}(G)$ eine Gruppe bezüglich der Komposition bildet.

(b) Sei G eine Gruppe. Zu $g \in G$ sei γ_g die Abbildung $\gamma_g : G \to G$, $x \mapsto gxg^{-1}$. Zeigen Sie, dass $\gamma_g \in \mathrm{Aut}(G)$.

(c) Betrachten Sie die Abbildung $\Gamma : G \to \mathrm{Aut}(G)$, $g \mapsto \gamma_g$. Zeigen Sie, dass Γ ein Gruppenhomomorphismus ist.

(d) Was ist $\ker(\Gamma)$, wenn $G = S_3$?

HA5.2 (2 Punkte)**.** Sei M irgendeine nichtleere Menge, $\mathcal{P}(M)$ die Potenzmenge von M, Δ die symmetrische Differenz. Rechne nach, dass $(\mathcal{P}(M), \Delta, \cap)$ ein kommutativer Ring ist.

HA5.3 (5 Punkte)**.** (a) We consider the set of maps $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$. Show that $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ is a ring when equipped with pointwise addition and multiplication.

(b) An element f of a ring R is called zero divisor („Nullteiler“) if there exists an element $g \in R \setminus \{0\}$ such that $f \cdot g = 0$. Find a zero divisor in $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(c) A mapping of the form $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i$, where $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ is called a *real polynomial in one variable*. Show that the set $\mathbb{R}[x]$ of real polynomials in one variable forms a subring of $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, i.e., $(\mathbb{R}[x], +) < (\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +)$ and the multiplication preserves the subset $\mathbb{R}[x] \subset \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(d) Prove that for any set X and any ring R, the set $\mathrm{Abb}(X, R) := \{f : X \to R\}$ carries the structure of a ring with respect to pointwise addition and multiplication.

HA5.4 (5 Punkte)**.** Das kleinste gemeinsame Vielfache $\mathrm{kgV}(a, b)$ zweier Zahlen $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ist die kleinste natürliche Zahl, die von a und b geteilt wird. Der größte gemeinsame Teiler $\mathrm{ggT}(a, b)$ ist die größte natürliche Zahl, die a und b teilt.

(a) Zeigen Sie, dass es zu jeder Untergruppe $U \neq \{0\}$ von $(\mathbb{Z}, +)$ eine eindeutige Zahl $m \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $U = m\mathbb{Z}$ ist. (Hinweis: Studieren Sie $\min(\mathbb{N} \cap U)$ und verwenden Sie Division mit Rest in $\mathbb{Z}$.)

(b) Es seien $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = \mathrm{kgV}(a, b)\mathbb{Z}$.

(c) Es seien $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass es Zahlen $k, l \in \mathbb{Z}$ mit $ka + lb = \mathrm{ggT}(a, b)$ gibt. (Hinweis: Betrachten Sie die Teilmenge $\{ka + lb \mid k, l \in \mathbb{Z}\}$ von $\mathbb{Z}$, zeigen Sie, dass diese eine Untergruppe ist und benutzen Sie die Tatsache, dass jeder gemeinsame Teiler von a und b auch ein Teiler von $\mathrm{ggT}(a, b)$ ist.)

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Aufgabenblätter, etc.) sind unter

`https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/LinAlg1-WS1920/linalg1.php`

zu finden.

Abgabe bis 19.10.2019 in der Übung.