Lineare Algebra I **TU Chemnitz, Fakultät für Mathematik**
Wintersemester 2019/2020 Christian Sevenheck, Thomas Jahn
Ausgabe: 05.11.2019

Hausaufgabe 4

HA4.1 (6 Punkte)**.** (a) Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Zeigen Sie, dass auch $(G, *)$ mit der Verknüpfung $g * h := h \cdot g$ eine Gruppe ist.

(b) Es sei G eine Gruppe. Für alle $a \in G$ gelte $a^2 = 1$. Beweisen Sie, dass G abelsch ist.

(c) Geben Sie einen Isomorphismus zwischen den Gruppen $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ und $(\mathbb{R}, +)$ an und zeigen Sie dessen Injektivität!

HA4.2 (8 Punkte)**.** (a) Welche der folgenden Abbildungen sind Gruppenhomomorphismen? Hierbei soll die Verknüpfung auf $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{R}$ die übliche Addition sein.

(i) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $k \mapsto 8k$,
(ii) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $k \mapsto [2k]$,
(iii) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $k \mapsto k + 8$.

(b) Sei G eine beliebige Gruppe und $g \in G$. Ist dann die Abbildung $\varphi_g : G \to G, h \mapsto gh$ ein Gruppenhomomorphismus?

(c) Sei G eine Gruppe. Wie in der Vorlesung bezeichne $S(G)$ die Gruppe der Bijektionen der Menge G in sich selbst, mit der Komposition von Abbildungen als Verknüpfung. Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : G \to S(G)$, $g \mapsto \varphi_g$ ein injektiver Gruppenhomomorphismus ist. Hierbei ist φ_g die in (b) definierte Abbildung.

HA4.3 (6 Punkte)**.** Let X be a set and $(G, \cdot)$ a group with identity element e. By an *operation* or *action* of G on X we shall mean a mapping $\Phi : G \times X \to X$ satisfying $\Phi(g \cdot h, x) = \Phi(g, \Phi(h, x))$ and $\Phi(e, x) = x$ for all $g, h \in G$ and $x \in X$. The mappings Φ and $\cdot$ are often omitted in the notation and we just write gx for $\Phi(g, x)$. The defining properties of a group action are then $(gh)x = g(hx)$ and $1x = x$ for all $g, h \in G$ and $x \in X$. The subset Gx of X, consisting of all elements gx with $g \in G$ is called *orbit of x under G*. The set of orbits is called the *orbit space*. Describe the orbits and the orbit space in the following cases.

(a) $G = S_2$, $X = \mathbb{R}^2$, $\Phi(\sigma, (x_1, x_2)) := (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)})$,
(b) $G = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\Phi(r, x) := rx$,
(c) $G = (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$, $X = \mathbb{R}$, $\Phi(r, x) := rx$.

(For the sake of clarity of items (b) and (c), we did not suppress Φ this time.)

HA4.4 (Zusatzaufgabe: 2 Extrapunkte)**.** Bestimmen Sie alle Gruppenhomomorphismen der Gruppe $(\mathbb{Q}, +)$ in die Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$. Hinweis: Untersuchen Sie für einen gegebenen Gruppenhomomorphismus $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ das Element

$$\varphi\Bigg(\underbrace{\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{n\text{-mal}}\Bigg) \in \mathbb{Z}.$$

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Aufgabenblätter, etc.) sind unter

`https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/LinAlg1-WS1920/linalg1.php`

zu finden.

Abgabe bis 12.11.2019 in der Übung.