TU Chemnitz, Fakultät für Mathematik
Christian Sevenheck, Thomas Jahn

Hausaufgabe 3

HA3.1 (3 Punkte)**.** Let M be an arbitrary set and denote by $\mathcal{P}(M)$ the set of all subsets of M. Recall the definition of the *symmetric difference*: for subsets $A, B \subset M$, let $A \,\Delta\, B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Show that the pair $(\mathcal{P}(M), \Delta)$ is an abelian group.

HA3.2 (6 Punkte)**.** Beweisen Sie mit Hilfe des Prinzips des vollständigen Induktion, dass die folgenden Aussagen für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x, y \in \mathbb{R}$ gelten.

(a) $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$,
(b) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$,
(c) $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

HA3.3 (6 Punkte)**.** In der Vorlesung wurde für eine Menge M die Gruppe der Permutationen $(S(M), \circ)$ eingeführt. Wir definieren $S_n := S(\{1, \dots, n\})$ und nennen $(S_n, \circ)$ die *symmetrische Gruppe* (der Menge $\{1, \dots, n\}$).

(a) Bestimmen Sie alle Elemente der symmetrischen Gruppen S_1, S_2 und S_3.
(b) Für eine Gruppe $(G, *)$ mit neutralem Element e und für ein Element $g \in G$ heißt

$$o(g) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid \underbrace{g * \ldots * g}_{k-\text{mal}} = e\}$$

die Ordnung von g (insbesondere ist also $o(e) = 1$). Bestimmen Sie die Ordnungen der Gruppenelemente von S_1, S_2 und S_3.

HA3.4 (5 Punkte)**.** Wir definieren die Teilmenge $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ von $\mathbb{R}$ als

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \left\{ a + b\sqrt{2} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \setminus \{0\}, \cdot)$ eine abelsche Gruppe ist.

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Aufgabenblätter, etc.) sind unter

`https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/LinAlg1-WS1920/linalg1.php`

zu finden.

Abgabe bis 05.11.2019 in der Übung.