

## Hausaufgabe 2

**HA2.1** (4 Punkte). Untersuchen Sie die folgenden Relationen auf Symmetrie, Reflexivität und Transitivität. Beschreiben Sie für die Äquivalenzrelationen die Äquivalenzklassen.

- (a) Es bezeichne  $A$  die Menge aller Autos.
- (i) Ein Auto  $a_1$  steht in optischer Relation zu einem Auto  $a_2$ , i. Z.  $a_1 \sim_o a_2$ , falls die beiden dieselbe Farbe haben oder von derselben Marke sind.
  - (ii) Ein Auto  $a_1$  steht in Versicherungsrelation zu einem Auto  $a_2$ , i. Z.  $a_1 \sim_v a_2$ , falls beide gleiches Baujahr und gleichen Hubraum haben.
- (b) Es seien  $X$  und  $Y$  Mengen,  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung. Betrachten Sie die folgende Relation auf  $X$ :  $x_1 \sim x_2 :\Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$ .
- (c) (i) Betrachten Sie auf der Menge der reellen Zahlen die Relation  $x \sim y :\Leftrightarrow xy \geq 0$ .  
(ii) Betrachten Sie nun auf der Menge  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  die folgende Relation:  $x \sim y :\Leftrightarrow xy \geq 0$ .

**HA2.2** (4 Punkte). Seien  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  Abbildungen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Sind  $f$  und  $g$  injektiv, so auch  $g \circ f$ .
- (b) Sind  $f$  und  $g$  surjektiv, so auch  $g \circ f$ .
- (c) Sind  $f$  und  $g \circ f$  bijektiv, dann ist  $g$  bijektiv.
- (d) Sind  $g$  und  $g \circ f$  bijektiv, dann ist  $f$  bijektiv.

**HA2.3** (5 Punkte). Seien  $M, N$  Mengen,  $f : M \rightarrow N$  eine Abbildung und  $A, B \subset M$  sowie  $C, D \subset N$  Teilmengen. Zeigen Sie:

- (a) Gilt  $A \subset B$ , dann folgt  $f(A) \subset f(B)$ .
- (b) Ist  $C \subset D$ , so gilt  $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$ .
- (c) Es gelten  $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$  und  $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$ .
- (d) Es gelten  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$  und  $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ .
- (e) Geben Sie ein Beispiel an, so dass  $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$  gilt.

**HA2.4** (5 Punkte). Für  $t > 0$  sei  $M_t = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq t\}$ . Bestimmen Sie

- (a)  $\bigcup_{0 < t \leq 1} M_t$ ,      (b)  $\bigcap_{0 < t \leq 1} M_t$ ,      (c)  $\bigcup_{0 < t < 1} M_t$ ,      (d)  $\bigcap_{0 < t < 1} M_t$ ,      (e)  $\bigcap_{1 \leq t < 2} M_t$ .

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Aufgabenblätter, etc.) sind unter

<https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/LinAlg1-WS1920/linalg1.php>

zu finden.

**Abgabe bis 29.10.2019 in der Übung.**