# Lineare Algebra 1

WS 2019/2020

Christian Sevenheck

Fakultät für Mathematik

TU Chemnitz

vorläufige Fassung, 29. März 2020

Fehler und Bemerkungen bitte an : christian.sevenheck@mathematik.tu-chemnitz.de

# Inhaltsverzeichnis


**1 Lineare Gleichungssysteme** **4**

**2 Logik, Mengenlehre und Abbildungen** **13**
2.1 Vorkenntnisse, Symbole und Zahlenbereiche . . . . . 13
2.2 Mengen . . . . . 15
2.3 Abbildungen . . . . . 21
2.4 Aussagenlogik und Beweismethoden . . . . . 28

**3 Algebraische Grundbegriffe** **35**
3.1 Gruppen . . . . . 35
3.2 Ringe und Körper . . . . . 43
3.3 Polynome . . . . . 51

**4 Vektorräume** **58**
4.1 Grundlagen, Erzeugendensysteme und lineare Unabhängigkeit . . . . . 58
4.2 Basen und Dimensionen . . . . . 66

**5 Lineare Abbildungen** **78**
5.1 Definitionen und erste Beispiele . . . . . 78
5.2 Bild und Kern einer linearen Abbildung . . . . . 81
5.3 Lineare Abbildungen und Matrizen . . . . . 85
5.4 Matrizenmultiplikation . . . . . 88
5.5 Koordinatentransformationen . . . . . 92
5.6 Matrizen und lineare Gleichungssysteme . . . . . 96
5.7 Elementarmatrizen . . . . . 101

**6 Determinanten** **107**
6.1 Permutationen . . . . . 107
6.2 Axiome für Determinanten . . . . . 113
6.3 Die Leibniz-Formel . . . . . 117
6.4 Komplementärmatrix, Cramersche Regel und Minoren . . . . . 123

**7 Dualräume** **129**

# Kapitel 1

# Lineare Gleichungssysteme

In diesem Kapitel wollen wir die zentralen Themen dieser Vorlesung erklären, ohne dabei irgendwelche abstrakten Konzepte, die später eingeführt werden, zu verwenden. Je nachdem, was Sie aus der Schule an mathematischer Vorbildung mitbringen, werden Ihnen die hier angesprochenen Dinge schon mehr oder weniger vertraut sein. Sollten Sie einen Begriff, der hier verwendet, aber nicht erklärt wird, noch nicht kennen, machen Sie sich bitte darüber keine Gedanken: ab dem nächsten Kapitel werden alle verwendeten Konzepte noch einmal ganz ausführlich und mit der in der Mathematik üblichen und nötigen Genauigkeit eingeführt. Wir schreiben hier auch schon alles so auf, wie es später und in jedem mathematischen Text vorkommt, also mit Definitionen, Sätzen, Beweisen usw. Was das genau ist, und was man wo verwendet, wird im nächsten Kapitel ebenfalls noch einmal erklärt. Der Sinn dieses Kapitels ist es vor allem, ihnen einen Vorgeschmack auf das, was wir in diesem Semester machen wollen, zu geben.
Was sind lineare Gleichungssysteme? Nun, es sind Gleichungen mit Unbekannten, in der Regel mehrere Gleichungen mit mehreren Unbekannten (nicht unbedingt gleich viele Gleichungen und Unbekannte), bei denen *keine* Potenzen auftreten (daher „linear“). Ein solches System sieht so aus:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11} \cdot x_1 & + & a_{12} \cdot x_2 & + & \ldots + a_{1n} \cdot x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & & & \\ a_{m1} \cdot x_1 & + & a_{m2} \cdot x_2 & + & \ldots + a_{mn} \cdot x_n & = & b_m \end{array}$$

Dabei sind $x_1, \ldots, x_n$ die Unbekannten, und die Symbole $a_{ij}$ und $b_i$ sind irgendwelche gegebenen Zahlen, sagen wir, reelle Zahlen. Die Aufgabe besteht nun darin, Lösungen für die Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$ zu finden, so dass das System erfüllt ist. Genauer ist eine Lösung ein *Vektor* $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$.
**Beispiele:**

1. $m = n = 1$. Dann haben wir Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gegeben, und nur eine Gleichung, nämlich

   $$a \cdot x = b$$

   Diese löst man mit dem Dreisatz, nämlich $x = b/a$. Falls $a \neq 0$ ist, gibt es immer eine Lösung, und zwar genau eine. Im Fall $a = 0$ gibt es keine Lösung, außer, wenn auch $b = 0$ ist, dann ist jedes $x \in \mathbb{R}$ eine Lösung.

2. $m = 1, n = 2$: Betrachten wir das Beispiel

   $$2x + 3y = 6.$$

   Die Lösung ist eine Gerade in der $(x, y)$-Ebene, also in $\mathbb{R}^2$. Falls wir für $y$ einen Parameter $\lambda$ einsetzen, dann können wir die Gleichung nach $x$ auflösen und erhalten alle Lösungen in Abhängigkeit von $\lambda$, nämlich

   $$(x, y) = (3 - \frac{3}{2}\lambda, \lambda).$$

Wir sehen also, dass die Lösungen dieser linearen Gleichung durch eine Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \lambda & \longmapsto & (3 - \frac{3}{2}\lambda, \lambda) \end{array}$$

*parametrisiert* werden. Dies wird durch das folgende Bild visualisiert.

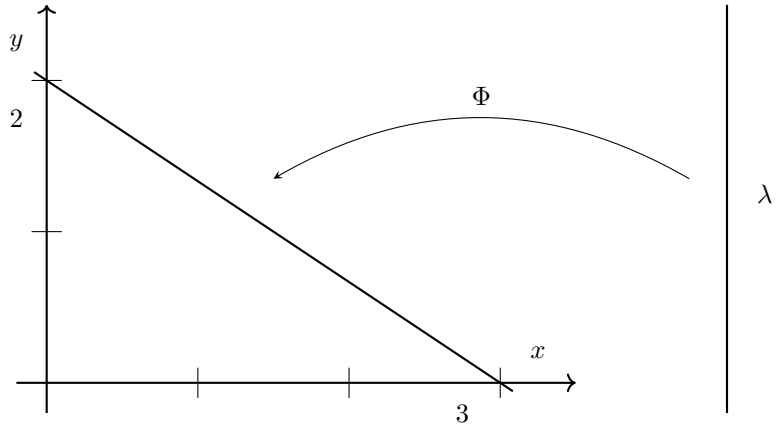



Abbildung 1.1: Gerade in der Ebene.

3. $m = 2, n = 2$: Betrachten wir folgendes Beispiel

$$\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 & = & 1 \\ x_2 & = & 3 \end{array}$$

Hier ist die Lösung der Schnitt der zwei durch die beiden Gleichungen gegebenen Geraden, also der Punkt $(4, 3) \in \mathbb{R}^2$.

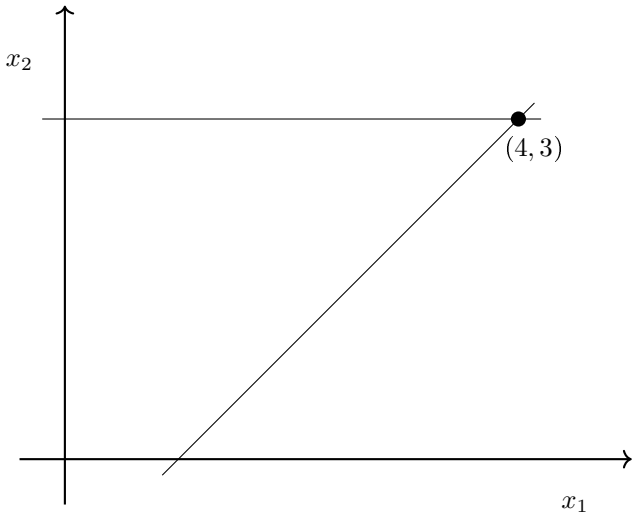



Abbildung 1.2: Schnitt zweier Geraden.

4. Ein weiteres Beispiel mit $m = n = 2$:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 3 \end{aligned}$$

Durch Umformen erhalten wir

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 1 \\ 2x_1 &= 4 \end{aligned}$$

also ist $(x_1, x_2) = (2, 1)$ die einzige Lösung.

5. $m = 2, n = 3$: Jetzt haben wir zwei Gleichungen, aber mit drei Variablen, z.B.:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ x + 2z &= 2 \end{aligned}$$

Jede dieser Gleichungen definiert eine Ebene im $(x, y, z)$-Raum, also in $\mathbb{R}^3$, und die Lösung des Systems ist der Schnitt dieser beiden Ebenen, also eine Gerade (es sei denn, die Ebenen sind parallel, was bei diesem Beispiel nicht der Fall ist). Es gibt also unendlich viele Lösungen, aber diese können wir wieder parametrisieren, nämlich durch

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \lambda &\longmapsto (2 - 2\lambda, 1 + \lambda, \lambda) \end{aligned}$$

6. Ein Beispiel aus der Praxis: Ein Unternehmen produziere zwei verschiedene Produkte, mit dem ersten Produkt wird je Stück ein Gewinn von 1€ erzielt, mit dem zweiten ein Gewinn von 2€ pro Stück. Für die Produktion des ersten Produkts benötigt man eine Arbeitsstunde, für das zweite hingegen drei Arbeitsstunden. Wegen begrenzter Produktionskapazitäten sind pro Tag nur 3000 Arbeitsstunden verfügbar. Andererseits können wegen begrenzter Rohstoffe pro Tag auch nur 2000 Produkte hergestellt werden. Das Problem besteht nun darin, zu ermitteln, mit welcher Anzahl von Produkten des Typs 1 und des Typs 2 an einem Tag der maximale Gewinn erzielt werden kann. Dies ist ein (sehr elementares) Problem der linearen Optimierung. Hier reicht es nicht, lineare *Gleichungssysteme* zu betrachten, sondern man muss Systeme von *Ungleichungen* aufstellen und lösen. Sei in unserem Beispiel $x_i$ für $i = 1$ oder $i = 2$ die Anzahl der an einem Tag hergestellten Produkte des Typs 1 bzw. 2, dann ist der Gewinn $G = x_1 + 2 \cdot x_2$. Die sich aus der Problemstellung ergebenden Einschränkungen sind

$$\begin{aligned} \text{Arbeit:} \quad x_1 + 3x_2 &\leqslant 3000 \\ \text{Rohstoffe:} \quad x_1 + x_2 &\leqslant 2000 \end{aligned}$$

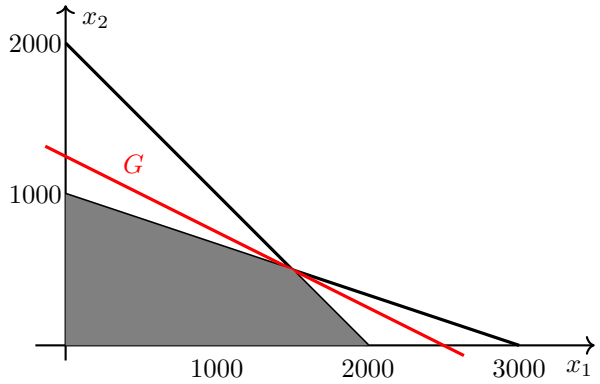



Abbildung 1.3: Optimierungsproblem.

Die Menge der Punkte $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, welche diese Bedingungen erfüllen, ist das im Bild 1.3 grau eingezeichnete Gebiet.

Man kann leicht sehen, dass die Funktion $G$, also der Gewinn, gerade am Schnittpunkt der beiden Geraden, also bei $(x_1, x_2) = (1500, 500)$ maximal wird, und dann ist $G = 2500€$.

Wir wollen jetzt ein allgemeines Lösungsverfahren für Systeme linearer Gleichungen kennenlernen. Wir starten wieder mit einem System

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11} \cdot x_1 & + & a_{12} \cdot x_2 & + & \ldots + a_{1n} \cdot x_n & = & b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 & + & a_{22} \cdot x_2 & + & \ldots + a_{2n} \cdot x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & \\ a_{m1} \cdot x_1 & + & a_{m2} \cdot x_2 & + & \ldots + a_{mn} \cdot x_n & = & b_m \end{array}$$

wobei die Zahlen $a_{ij}, b_i$ in $\mathbb{R}$ sein sollen. Die Zahlen $a_{ij}$ nennt man Koeffizienten des Systems, die Zahlen $b_i$ manchmal die Konstanten. Zuerst wollen wir dieses System effizienter aufschreiben, dies geht mit Matrizen: Ein Matrix ist ein rechteckiges Schema (sagen wir mit $m$ Zeilen und $n$ Spalten), in welches man z.B. reelle Zahlen hineinschreibt. Wir erhalten daher aus den Koeffizienten eine Matrix, welche unserem Gleichungssystem zugeordnet ist, und diese sieht so aus:

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Analog können wir die Konstanten in eine Matrix mit $m$ Zeilen und nur einer Spalte aufschreiben (solche Matrizen heißen Spaltenvektoren):

$$b =: \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Jetzt schreiben wir auch die Variablen $x_1, \ldots, x_n$ als Spaltenvektor, also als eine Matrix mit $n$ Zeilen und einer Spalte (Achtung: bisher hatten wir die Variablen bzw. die Lösungen als Zeilenvektor $x = (x_1, \ldots, x_n)$ geschrieben):

$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Der Trick ist nun, dass wir eine Multiplikation der Matrix $A$ mit dem Spaltenvektor $x$ definieren können, nämlich als

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11} \cdot x_1 & + & a_{12} \cdot x_2 & + & \ldots & + & a_{1n} \cdot x_n \\ a_{21} \cdot x_1 & + & a_{22} \cdot x_2 & + & \ldots & + & a_{2n} \cdot x_n \\ \vdots & & & & & & \\ a_{m1} \cdot x_1 & + & a_{m2} \cdot x_2 & + & \ldots & + & a_{mn} \cdot x_n \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

Später werden wir viel allgemeinere Matrizen multiplizieren, hier sei nur angemerkt, dass wir das Produkt von $A$ mit $x$ definieren können, weil die Anzahl der Spalten von $A$ gleich der Anzahl der Zeilen von $x$ ist (nämlich gleich $n$).
Mit dieser Konvention können wir das ganze lineare System als eine einzige Gleichung schreiben, nämlich

$$A \cdot x = b,$$

natürlich ist die Gleichung nur deshalb so kurz, weil die Objekte größer geworden sind, statt $m$ Gleichheiten von reellen Zahlen haben wir jetzt eine Gleichheit von Spaltenvektoren (der Länge $m$). Dann definieren wir

$$\text{Lös}\,(A,b) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot x = b\} \tag{1.2}$$

als die Menge der Lösungen des durch $A$ und $b$ gegebenen Systems. Hier haben wir einfach die Spaltenvektoren der Länge $n$ mit Einträgen aus $\mathbb{R}$ mit $\mathbb{R}^n$ identifiziert, warum wir das machen dürfen, wird später genauer erläutert.
Wir können auch noch die sogenannte *erweiterte Koeffizientenmatrix* definieren, dies ist die Matrix, manchmal als $(A|b)$ bezeichnet, bei der man den Spaltenvektor $b$ als eine zusätzliche Spalte an die Matrix $A$ anhängt. Der Vorteil ist, dass damit die gesamte Information über das gegebene Gleichungssystem in einer Matrix zusammengefasst wird.
Hier sind die erweiterten Koeffizientenmatrizen für die obigen Beispiele:

1. $$(A|b) = (a\,b),$$

2. $$(A|b) = (2\,3\,6),$$

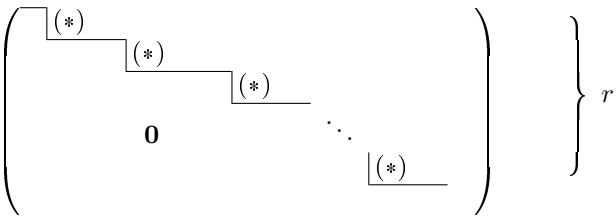
3. $$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

4. $$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

5. $$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

6. In diesem Fall hatten wir es mit einem System von Ungleichungen zu tun, aber wie wir gesehen haben, löst man dieses, indem man sich das zugehörige Gleichungssystem anschaut. Dessen erweiterte Koeffizientenmatrix ist:
   $$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3000 \\ 1 & 1 & 2000 \end{pmatrix}$$
   Natürlich brauchen wir auch noch die Information über die Funktion $G$, also den Gewinn, um dieses Optimierungsproblem zu lösen, aber dies ignorieren wir im Moment.

Die Methode, um lineare Gleichungssysteme zu lösen, besteht nun darin, die erweiterte Koeffizientenmatrix so umzuformen, dass sich die Menge Lös $(A,b)$ nicht ändert, dass man diese aber an der umgeformten Matrix besser ablesen kann. Dazu brauchen wir einen neuen Begriff, nämlich den der *Zeilenstufenform*. Eine Matrix $C$ ist in Zeilenstufenform, wenn sie folgendermaßen aussieht:




Hierbei sollen unter der Stufenlinie nur Nullen stehen (dies wird durch die fettgedruckte Null angedeutet), und an den durch $(*)$ markierten Stellen dürfen nur Zahlen, welche ungleich Null sind, stehen. Diese speziellen

Elemente heissen Pivots (Angelpunkte). An allen anderen Positionen oberhalb der Stufenlinie dürfen sowohl Nullen als auch Zahlen ungleich Null stehen. Die Anzahl der Zeilen, welche irgendeine Zahl ungleich Null enthalten, heißt der Rang der Matrix in Zeilenstufenform und wird mit $r$ bezeichnet.
Wir wollen diese Definition noch mathematisch präzise fassen.

**Definition 1.1.** *Eine Matrix $C = (c_{ij})_{i=1,\dots,m;j=1,\dots,n}$ heißt in Zeilenstufenform, wenn das folgende gilt:*

1. *Es gibt eine Zahl $r \in \{1,\dots,m\}$, so dass in den Zeilen $r+1, r+2, \dots, m$ nur Nullen stehen, anders formuliert, so dass $c_{ij} = 0$ ist für alle $i \in \{r+1,\dots,m\}$ und alle $j \in \{1,\dots,n\}$, und so, dass in den Zeilen $1, 2, \dots, r$ nicht nur Nullen stehen, d.h., für alle $i \in \{1,\dots,r\}$ existiert ein $j \in \{1,\dots,n\}$ mit $c_{ij} \neq 0$.*
2. *Sei $r$ die Zahl aus 1. und sei für alle $i \in \{1,\dots,r\}$ die Zahl $j_i$ der kleinste Spaltenindex, so dass $c_{i\,j_i} \neq 0$ ist, d.h., $c_{i\,j_i}$ ist der Pivot in der $i$-ten Zeile. Noch formaler ist*

$$j_i := \min(j \in \{1,\dots,n\} \mid c_{ij} \neq 0\}.$$

*Dann soll gelten:*

$$j_1 < j_2 < j_3 < \dots < j_r.$$

*Anders ausgedrückt: In jeder der ersten, zweite, ..., $r$-ten Zeile steht das Pivotelement echt weiter rechts als das Pivotelement in der Zeile davor.*

Hier ist ein Beispiel einer Matrix in Zeilenstufenform (mit $m = 4, n = 6$):

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hier ist also $r = 3$ und $j_1 = 2, j_2 = 3, j_3 = 5$ (die Pivotelemente sind fett eingezeichnet). Jetzt erweitern wir diese Matrix um eine Spalte, und betrachten die so entstandene Matrix als erweiterte Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems.

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & \mathbf{1} & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Betrachten wir noch einmal das Gleichungssystem, welches zu dieser Matrix gehört:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} \mathbf{1} \cdot x_2 & + & & & 2 \cdot x_4 & + & & 3 \cdot x_6 & = & 0 \\ & & \mathbf{1} \cdot x_3 & + & x_4 & + & & x_6 & = & 1 \\ & & & & & & \mathbf{2} \cdot x_5 & + & x_6 & = & 0 \end{array}$$

Nun sieht man ziemlich leicht, wie man die Lösungen bestimmt: Betrachte alle Variablen $x_i$, welche in keiner Zeile zu einem Pivotelement gehören, in diesem Beispiel also $x_1, x_4$ und $x_6$. Diese betrachten wir als Parameter, d.h., wir können sie frei wählen. Setze zum Beispiel

$$x_6 = \lambda_1, \quad x_4 = \lambda_2 \quad \text{und} \quad x_1 = \lambda_3.$$

Dann lösen wir nach den anderen Variablen auf: Man erkennt, dass dies immer möglich ist, genau deshalb, weil die Pivots niemals Null sind, und wegen der Anordnungsbedingung $j_1 < j_2 < \dots < j_r$. Im vorliegenden Beispiel haben wir

$$\begin{array}{rcl} x_6 & = & \lambda_1 \\ x_5 & = & -\frac{1}{2}\lambda_1 \\ x_4 & = & \lambda_2 \\ x_3 & = & 1 - \lambda_1 - \lambda_2 \\ x_2 & = & -2\lambda_2 - 3\lambda_1 \\ x_1 & = & \lambda_3. \end{array}$$

Wieder können wir diese Lösungsmenge parametrisieren, nämlich durch die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^6 \\ (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) & \longmapsto & \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ -2\lambda_2 - 3\lambda_1 \\ 1 - \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_2 \\ -\frac{1}{2}\lambda_1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Präzise formuliert ist die Menge Lös $(A, b)$ gleich dem Bild der Abbildung $\Phi$, also gleich der Menge $\Phi(\mathbb{R}^3)$. Man sieht sofort, dass auch der Fall eintreten kann, dass es gar keine Lösungen gibt: Ist nämlich für ein $i > r$ die Konstante $b_i$ ungleich Null, dann enthält das Gleichungssystem eine Gleichung $0 = b_i$, und diese kann natürlich nie erfüllt werden.
Wir sehen also, dass wir bei Gleichungssystemem, deren zugehörige Matrix (nicht die erweiterte Koeffizientenmatrix) in Zeilenstufenform ist, ablesen können, ob es Lösungen gibt, und diese auch bestimmen können. Wie bringen wir eine Matrix nun in Zeilenstufenform ? Hierzu verwenden wir gewisse sogenannte *elementare Zeilenumformungen*. Davon gibt es zwei Typen:

1. *Vertauschen von Zeilen*
2. *Addition des $c$-fachen der $i$-ten zur $j$-ten Zeile*, hierbei ist $c$ eine reelle Zahl.

Damit es überhaupt Sinn macht, diese Umformungen anzuwenden, müssen wir sicherstellen, dass sich die Lösungsmenge des zugehörigen Gleichungssystems nicht ändert. Dies liefert der folgende Satz.

**Satz 1.2.** *Sei $(A|b)$ die erweiterte Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems. Sei $(\widetilde{A}|\widetilde{b})$ eine Matrix, welche aus $(A|b)$ durch elementare Zeilenumformungen hervorgeht. Dann gilt*

$$L\ddot{o}s\,(A, b) = L\ddot{o}s\,(\widetilde{A}, \widetilde{b})$$

*Beweis.* Wir müssen nur beweisen, dass Lös $(A, b)$ = Lös $(\widetilde{A}, \widetilde{b})$ gilt, wenn $(\widetilde{A}, \widetilde{b})$ aus $(A, b)$ durch einen einzigen Umformungsschritt entsteht. Wenn wir das bewiesen haben, dann ändert sich die Lösungsmenge natürlich auch bei mehrfachem Anwenden der Umformungsschritte nicht. Umformungen vom Typ 1 ändern die Lösungsmenge nicht, denn ein Spaltenvektor $x$ ist Lösung genau dann, wenn die Zahlen $x_i$ alle Gleichungen des Systems erfüllen, und durch Umformungen vom Typ 1 (also Vertauschen von Zeilen) werden diese Gleichungen nur anders angeordnet.
Betrachten wir nun Umformungen des Typs 2. Da dabei nur die Zeilen $i$ und $j$ involviert sind, schreiben wir die anderen Gleichungen des Systems nicht auf, denn diese ändern sich durch den Umformungsschritt nicht. Das System sieht dann so aus:

$$(A|b) \quad : \qquad \begin{array}{rcccccl} a_{i1}x_1 & + & \ldots & + & a_{in}x_n & = & b_i \\ a_{j1}x_1 & + & \ldots & + & a_{jn}x_n & = & b_j \end{array}$$

$$(\widetilde{A}|\widetilde{b}) \quad : \qquad \begin{array}{rcccccl} a_{i1}x_1 & + & \ldots & + & a_{in}x_n & = & b_i \\ (a_{j1} + c \cdot a_{i1})x_1 & + & \ldots & + & (a_{jn} + c \cdot a_{in})x_n & = & b_j + cb_i \end{array}$$

Für diese Systeme müssen wir nun Lös $(A, b)$ = Lös $(\widetilde{A}, \widetilde{b})$ beweisen: Angenommen, $x_1, \ldots, x_n$ erfüllen das zu $(A, b)$ gehörige System, dann erfüllen sie natürlich auch die erste Gleichung des zu $(\widetilde{A}, \widehat{b})$ gehörigen Systems. Wenn wir aber das $c$-fache der ersten Gleichung von $(A, b)$ zur zweiten Gleichung von $(A, b)$ addieren, bekommen wir immer noch eine wahre Aussage, und daher erfüllen $x_1, \ldots, x_n$ auch die zweite Gleichung des zu $(\widetilde{A}, \widetilde{b})$ gehörigen Systems. Analog folgt, falls $x_1, \ldots, x_n$ Lösung von $(\widetilde{A}, \widetilde{b})$ sind, dass sie auch Lösung von $(A, b)$ sein müssen, denn die zweite Gleichung von $(A, b)$ erhält man, indem man von der zweiten von $(\widetilde{A}, \widetilde{b})$ das $c$-fache der ersten abzieht. □

Um nun endlich konkret Systeme lösen zu können, brauchen wir nur noch die folgende Aussage zu beweisen.

**Satz 1.3.** *Jede Matrix $B$ kann durch endlich viele elementare Zeilenumformungen in eine Matrix $B'$ in Zeilenstufenform überführt werden.*

Wir illustrieren diesen Satz zunächst an einem Beispiel.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 9 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 9 & 1 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 2 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{(I)}\leftrightarrow\text{(II)}} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 5 & 9 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 9 & 0 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 2 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(-2)\cdot\text{(I)}+\text{(III)}\to\text{(III)}} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 5 & 9 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 9 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -9 & 0 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(-3)\cdot\text{(I)}+\text{(IV)}\to\text{(IV)}} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 5 & 9 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 9 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -9 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -18 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{(II)}+\text{(III)}\to\text{(III)}} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 5 & 9 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -18 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3\cdot\text{(II)}+\text{(IV)}\to\text{(IV)}} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 5 & 9 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{(III)}\leftrightarrow\text{(IV)}} \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{3} & 4 & 5 & 9 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{9} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wir haben hier die Umformungsschritte über den Pfeilen angedeutet. In der letzten Matrix sind die Pivotelemente wieder fett eingezeichnet. Um das System zu lösen, sezten wir $x_3 = \lambda$, und erhalten

$$x_4 = -\frac{1}{3},\ x_3 = \lambda,\ x_2 = 3 - 2\lambda,\ x_1 = \frac{1}{3}\left(1 - 4(3 - 2\lambda) - 5\lambda - 9 \cdot (-\frac{1}{3})\right) = \lambda - \frac{8}{3}$$

und somit die Parametrisierung

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathbb{R} : & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ \lambda & \longmapsto & \begin{pmatrix} \lambda - \frac{8}{3} \\ 3 - 2\lambda \\ \lambda \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{3} \\ 3 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

*Beweisidee.* Leider ist es etwas umständlich, den Beweis formal korrekt aufzuschreiben, daher begnügen wir uns hier mit der Darstellung des wesentlichen Teils des Arguments. Sei $m$ die Anzahl der Zeilen und $n$ die Anzahl der Spalten von $B$. Die Einträge von $B$ heißen $b_{ij}$.
Falls die Matrix $B$ nur aus Nullen besteht, ist sie schon in Zeilenstufenform, und dann ist der Rang $r$ gleich Null. Falls dies nicht der Fall ist, gibt es also irgendeinen Eintrag von $B$, welcher ungleich Null ist. Dann wählen wir die Spalte mit kleinstem Index, welche Einträge ungleich Null enthält, genauer, wir wählen den Index

$$j := \min\left(k \in \{1, \ldots, n\} \mid \exists i \in \{1, \ldots, m\} : b_{ik} \neq 0\right).$$

In der $j$-ten Spalte gibt es also Einträge, welche nicht Null sind (und in allen Spalten links davon stehen nur Nullen). Dann sei $i$ ein Zeilenindex, so dass $b_{i\,j}$ ungleich Null ist. Vertausche die $i$-te mit der ersten Zeile (Umformung vom Typ 1) und erhalte die Matrix $\widetilde{B}$ mit Einträgen $(\widetilde{b}_{ij})$. Es ist dann $\widetilde{b}_{1j} \neq 0$. Dann können wir durch Umformungen vom Typ 2 alle Einträge in der $j$-ten Spalte außer $\widetilde{b}_{1j}$ (also alle Einträge unterhalb

von $\widetilde{b}_{1j}$) zu Null machen: für jedes $i \in \{2, \ldots, m\}$ addieren wir zur $i$-ten Zeile das $-\frac{\widetilde{b}_{ij}}{\widetilde{b}_{1j}}$-fache der ersten Zeile. Nach diesen Umformungsschritten erhalten wir eine Matrix $C$ mit Einträgen $c_{ij}$, welche so aussieht:

$$\left(\begin{array}{ccccc} 0 & \ldots & 0 & c_{1j} & * \quad \ldots\ldots \quad * \\ \vdots & & \vdots & 0 & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \qquad C_2 \\ 0 & & 0 & 0 & \end{array}\right)$$

Hierbei ist $c_{1j} = \widetilde{b}_{1j}$, also insbesondere ungleich Null, und daher unser erstes Pivotelement. Die Matrix $C_2$ hat jetzt nur noch $m-1$ Zeilen, und nur noch $n-j$ Spalten. Jetzt betrachten wir nur noch diese Matrix $C_2$, und führen das eben beschriebene Verfahren noch einmal durch. Dann erhalten wir wieder ein Pivotelement, und eine kleinere Matrix $C_3$. Es ist klar, dass dieses Verfahren irgendwann abbrechen muss, und das Ergebnis ist eine Matrix $B'$ in Zeilenstufenform. □

Wir fassen das so erhaltene Verfahren zum Lösen linearer Gleichungssysteme (auch Gaussches Eliminationsverfahren, nach Mathematiker Carl Friedrich Gauss) noch einmal zusammen: Sei ein lineares Gleichungssystem mit $n$ Unbekannten und $m$ Gleichungen gegeben.

1. Bestimme aus dem gegebenen System die erweiterte Koeffizientenmatrix $B = (A|b)$, diese hat $m$ Zeilen und $n+1$ Spalten.

2. Forme $B$ durch elementare Zeilenumformungen um, solange, bis $A$ (nicht $B$ !) in Zeilenstufenform ist. Anders formuliert: Man forme die Matrix $A$ um, bis sie in Zeilenstufenform ist, aber in jedem Schritt wird der Konstantenvektor $b$ mitumgeformt. Achtung: In der letzten Spalte von $B$, also im Konstantevektor $b$ werden keine Pivotelemente gesucht. Die am Ende erhaltene Matrix heisse $(\widetilde{A}, \widetilde{b})$ und habe Rang $r$.

3. Prüfe, ob es ein $i \in \{r+1, \ldots, m\}$ gibt mit $b_i \neq 0$. Falls ja, hat das System keine Lösung, d.h., $\text{Lös}\,(A, b) = \varnothing$.

4. Falls es kein solches $b_i$ gibt, d.h., falls $b_i = 0$ für alle $i > r$, dann hat das System Lösungen, welche durch eine Parametrisierung
$$\Phi : \mathbb{R}^{n-r} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
gegeben werden. Dies wird berechnet, indem man alle Variablen $x_j$, so dass in der $j$-ten Spalte von $\widetilde{A}$ kein Pivot vorkommt, als Parameter $\lambda_i$ betrachtet, und die anderen $x_j$ durch Rückeinsetzen aus diesen bestimmt.

# Kapitel 2

# Logik, Mengenlehre und Abbildungen

Bevor wir die im ersten Kapitel angedeutete Theorie systematische entwickeln können, müssen wir einige ganz grundlegende Konzepte der Mathematik einführen. Alles, was in diesem Kapitel behandelt wird, werden Sie in der einen oder anderen Form in jeder Erstsemestervorlesung, bei der es um Mathematik geht, finden. Man kann ohne Übertreibung sagen, dass wir hier die *Sprache der Mathematik* einführen. Diese ist zwar extrem einfach verglichen mit jeder echten Sprache, aber auch in der Mathematik reicht es nicht, „Vokabeln“ zu lernen, sondern man muss eine gewisse Zeit mit den gelernten Begriffen arbeiten, um sich wirklich daran zu gewöhnen, und um zu den eigentlichen Inhalten vorzudringen, ohne ständig über elementare Begrifflichkeiten nachdenken zu müssen.
Diese Skript ist in diesem und im nächsten Kapitel sehr ausführlich, und geht nicht im Inhalt, aber in den Erklärungen zum Teil über die Vorlesung hinaus. Damit soll Ihnen der Einstieg in die Mathematik erleichtert werden. In den hinteren Kapiteln sind die Erklärungen kürzer gehalten, um Sie noch mehr zum Selbst- und Mitdenken anzuregen.

## 2.1 Vorkenntnisse, Symbole und Zahlenbereiche

Eigentlich wird bei einem Mathematikstudium fast nichts an Vorkenntnissen vorausgesetzt. Fast alles wird in den nächsten Wochen neu entwickelt. Ein paar ganz grundlegende Dinge sollten Sie aber doch kennen, und die wollen wir hier noch einmal auflisten. Außerdem werden einige Symbole eingeführt bzw. wiederholt, denn in der Mathematik benutzt man sehr häufig Symbole, um Objekte (Zahlen, Mengen, geometrische Gebilde etc.) zu benennen.
Zunächst eine Vorbemerkung über die Art und Weise, in der der folgende Stoff präsentiert wird: Mathematische Texte bestehen aus wenigen, immer wiederkehrenden Elementen. Die wichtigsten sind *Definitionen*, *Sätze* (oder auch *Theoreme*, Einzahl: *Theorem*), *Beweise* sowie *Propositionen* (Einzahl: *Proposition), Lemmata* (Einzahl: *Lemma*) und *Korollare* (Einzahl *Korollar*). Definitionen dienen zur Begriffsbildung: Es wird da einem Objekt, oder einer Konstruktion, welche entweder schon bekannt ist, oder welche innerhalb der Definition präzise beschrieben wird, ein Name gegeben. Daraus ergibt sich, dass der Autor des mathematischen Textes in der Definition größtmögliche Freiheit hat, denn er kann ja im Prinzip Namen beliebig vergeben. Insbesondere muss da eigentlich nichts begründet werden, obwohl man natürlich in der Praxis immer versucht, mathematischen Objekten Namen so zu geben, dass die innere Logik auch in der Namensgebung sichtbar wird. Im Gegensatz dazu sind Sätze, Theoreme, Propositionen, Lemmata und Korollare *Aussagen*. Diese müssen in einem mathematischen Text immer wahr sein (zu Details zur Aussagenlogik kommen wir bald, siehe Abschnitt 2.4 weiter unten in diesem Kapitel), und die Wahrheit muss präzise begründet werden. Dazu dient ein Beweis, der in der Regel nach der Aussage aufgeschrieben wird. Manchmal kann es auch sein, dass der Beweis später kommt, weil zum Beispiel andere Aussage, die zum Beweis benötigt werden, erst noch entwickelt werden müssen. Ein Satz oder ein Theorem enthält meist eine wichtige, im entsprechenden Kontext zentrale Aussage. Hingegen ist ein Lemma eher eine Hilfsaussage, d.h., man vermerkt da etwas, was

meistens später noch einmal gebraucht wird, was aber eventuell allein nicht wert wäre, extra aufgeschrieben zu werden. Ein Korollar ist eine Konsequenz einer vorhergehenden Aussage. Eine Proposition ist wichtiger als ein Lemma, aber vielleicht nicht so zentral wie ein Satz bzw. ein Theorem. Typischerweise entwickelt man ein Thema, in dem zunächst einige Definitionen gebracht werden, dann innerhalb eines oder mehrerer Lemmata einige Eigenschaften der in den Definitionen vorkommenden Objekte formuliert und dann auch bewiesen werden, um danach mit einem Satz oder Theorem eine oder mehrere zentrale Aussagen zu treffen (natürlich auch wieder mit Beweis). Danach können sich noch einige Korollare, welche (häufig einfache) Konsequenzen aus der im Satz/Theorem enthaltenen Hauptaussage sind, anschließen.
Nach diesen Bemerkungen kommen wir nun endlich zur eigentlichen Mathematik. Wir beginnen mit einer Wiederholung der bekannten Zahlenbereiche. Sie sollten aus der Schule die Bereiche der *natürlichen*, *ganzen*, *rationalen* und *reellen* Zahlen kennen: Die natürlichen Zahlen sind

$$1, 2, 3, \dots$$

Alle natürlichen Zahlen zusammen werden mit $\mathbb{N}$ bezeichnet. Ob die Null zu den natürlichen Zahlen gehört oder nicht, wird von Buch zu Buch, von Vorlesung zu Vorlesung unterschiedlich gehandhabt. Hier gehört sie nicht dazu, und wenn wir sie dabei haben wollen, sprechen wir von den natürlichen Zahlen mit Null, und schreiben $\mathbb{N}_0$. In den natürlichen Zahlen können wir addieren und multiplizieren, und manchmal, aber nicht immer subtrahieren und dividieren.
Eine Erweiterung sind die ganzen Zahlen, also

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$$

(hier gehört die Null immer dazu). Alle ganzen Zahlen zusammen heißen $\mathbb{Z}$. In den ganzen Zahlen können wir immer addieren und subtrahieren, auch multiplizieren, aber nicht immer dividieren. Dazu führt man die rationalen Zahlen ein: jede rationale Zahl ist ein Bruch mit Zähler und Nenner, wobei der Nenner nicht Null sein darf und die üblichen Kürzungsregeln gelten. Da man ein eventuelles Minuszeichen beliebig zwischen Zähler und Nenner verschieben kann, kann man sagen, dass eine rationale Zahl ein Bruch mit einer ganzen Zahl als Zähler und einer natürlichen Zahl als Nenner ist. Hier sind einige rationale Zahlen:

$$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 2, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \dots$$

Durch Bruchbildung erreichen wir, dass in den rationalen Zahlen beliebige Zahlen durcheinander dividiert werden können, außer natürlich Division durch Null, welche nicht erklärt ist. Sie sollten aus der Schule die Regeln der Bruchrechnung kennen, hier noch einmal einige Beispiele zur Wiederholung:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 5} = \frac{6}{15}\,; \quad \frac{x}{y} \cdot \frac{z}{w} = \frac{x \cdot z}{y \cdot w}\,; \qquad \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} = \frac{3+4}{6} = \frac{7}{6}\,; \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$$

Alle rationalen Zahlen gemeinsam werden mit $\mathbb{Q}$ bezeichnet. Schließlich sind die reellen Zahlen eine Erweiterung der rationalen Zahlen, in denen man Grenzwerte bilden kann: Dies ist ein fundamentales Thema der Analysis, welches wir hier nicht genau behandeln. Es sei nur erwähnt, dass es Gleichungen gibt, die in $\mathbb{Q}$ nicht gelöst werden können, z.B. $x^2 - 2 = 0$. Dies geht aber in den reellen Zahlen, welche wir mit $\mathbb{R}$ bezeichnen. Reelle Zahlen kann man in der Dezimaldarstellung schreiben, z.B.

$$1,2344;\ 1,33333\dots;\ 1,55555\dots,;\ 3,14159265359\dots$$

Es gibt allerdings auch Gleichungen, welche in den reellen Zahlen nicht gelöst werden können, z.B. $x^2+1 = 0$. Dies führt zu den komplexen Zahlen, und damit werden wir uns im nächsten Kapitel (siehe Abschnitt 3.2) beschäftigen.
Man beachte, dass die Symbole von Zahlbereichen immer einen extra Doppelstrich auf der linken Seite haben, damit möchte man zum Beispiel das Symbol $\mathbb{R}$ für die reellen Zahlen von dem üblichen großen $R$ unterscheiden, welches im nächsten Kapitel für den algebraischen Begriff eines *Rings* verwendet wird (siehe Definition 3.9).

Eine letzte Bemerkung über die verwendeten Symbole ist vielleicht angebracht: Am häufigsten werden wir es mit grossen und kleinen lateinischen Buchstaben zu tun haben, wobei es gewisse Konventionen gibt, wann man welche Buchstaben verwendet (diese sind aber nicht zwingend), zum Beispiel bezeichnet man Mengen, welche wir gleich genauer diskutieren, meistens mit großen lateinischen Buchstaben, und insbesondere mit den Buchstaben $M$, $X$ oder den ersten Buchstaben des Alphabets $A$, $B$, $C$ etc. Variablen, welche für Zahlen stehen, sind häufig kleine lateinische Buchstaben. Wir werden später in der Vorlesung gelegentlich erläutern, welche Konventionen zur Bezeichnung gelten.
Darüber hinaus brauchen wir auch sehr häufig kleine und manche große griechische Buchstaben. Zur Wiederholung listen wir diejenigen, die meistens verwendet werden, hier auf:

| Symbol klein | Symbol gross | Name | Symbol klein | Symbol gross | Name |
|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | | Alpha | $\mu$ | | My |
| $\beta$ | | Beta | $\nu$ | | Ny |
| $\gamma$ | $\Gamma$ | Gamma | $\xi$ | $\Xi$ | Xi |
| $\delta$ | $\Delta$ | Delta | $\pi$ | $\Pi$ | Pi |
| $\epsilon$ | | Epsilon | $\rho$ | | Rho |
| $\zeta$ | | Zeta | $\sigma$ | $\Sigma$ | Sigma |
| $\eta$ | | Eta | $\tau$ | | Tau |
| $\theta$ | $\Theta$ | Theta | $\varphi$ | $\Phi$ | Phi |
| $\iota$ | | Iota | $\chi$ | | Chi |
| $\kappa$ | | Kappa | $\psi$ | $\Psi$ | Psi |
| $\lambda$ | $\Lambda$ | Lambda | $\omega$ | $\Omega$ | Omega |

An dieser Stelle wollen wir noch zwei sehr wichtige Symbole wiederholen, welche große griechische Buchstaben verwenden, nämlich das Summen und das Produktsymbol. Wollen wir, z.B. in den natürlichen Zahlen, mehrfach Addieren, dann schreiben wir dies folgendermaßen. Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ natürliche Zahlen, dann sei

$$\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + \ldots + a_n$$

Wir ersetzen also die $\ldots$-Schreibweise, bei der man sich die durch die Punkte ausgelassenen Elemente der Summation dazu denken muss, durch die präzise Schreibweise $\sum_{i=1}^{n} a_i$. Hierbei steht unter dem Summenzeichen (also dem großen Sigma) der erste Index der Summation, über dem Summenzeichen der letzte und hinter dem Summenzeichen steht, was nun eigentlich aufsummiert wird. Natürlich kann man so auch unendliche Summen bilden, z.B.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad \text{oder} \qquad \sum_{i=0}^{\infty} q^n \qquad \text{für ein } q \in \mathbb{R}.$$

Dies ist besonders in der Analysis wichtig. Analog definiert man endliche bzw. unendliche Produkte $\prod_{i=1}^{n} a_i := a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$ bzw. $\prod_{i=1}^{\infty} a_i$.
Schlussendlich sei noch bemerkt, dass das Symbol :=, welches wir gerade schon einmal verwendet haben, bedeutet, dass das Objekt, welches links davon steht, durch das Objekt, welches rechts davon steht, definiert wird. Wie schon oben erwähnt, handelt es sich dabei um eine Namensgebung, hier allerdings auf der Ebene der Formeln, oder Symbole. Sehr häufig wird man daher := innerhalb einer Definition finden.

## 2.2 Mengen

Oben haben wir Sätze geschrieben wie: „Alle natürlichen Zahlen zusammen werden mit $\mathbb{N}$ bezeichnet“. Das ist nicht sehr präzise, was uns fehlt, ist ein Begriff, mit dem man Objekte zusammenfassen kann. Dies ist der Begriff der Menge, welcher am Anfang jeder ernsthaften Beschäftigung mit Mathematik steht.

**Definition 2.1.** *Eine Menge $M$ ist eine klar definierte Sammlung von Objekten, welche Elemente der Menge heißen. Jedes Element kommt in einer Menge nur genau einmal vor. Man schreibt:*

$$\begin{array}{rcl} x \in M & : & x \text{ ist Element der Menge } M \\ x \notin M & : & x \text{ ist nicht Element der Menge } M \end{array}$$

*Wen man eine Menge explizit durch Aufzählung angibt, dann schreibt man die Elemente in geschweifte Klammern, z.B. $M = \{a, b, c\}$.*

Es sei bemerkt, dass wir bei diesem grundlegenden Begriff schon eine Ausnahme der ansonsten in der Mathematik notwendigen logischen Strenge machen: Wir haben nicht wirklich erklärt, was eine Menge ist. Stattdessen setzen wir ein intuitives Verständnis, was eine Menge sein soll voraus, welches gleich durch viele Beispiele illustriert wird. Bei (fast) allen weiteren Definitionen in dieser Vorlesungen dürfen und werden wir natürlich nicht so vorgehen, sondern dann werden wir den neu zu erklärenden Begriff logisch formal und präzise einführen. Wollte man so etwas für Mengen machen, dann müsste man eine eigene Vorlesung über Logik und Mengenlehre halten.

**Beispiele für Mengen:**

1. Explizit angegebene Mengen, also

   $$M = \{1, 2, 3\};\ N = \{a, b, c, d\};\ A = \{*, +, \cdot\}$$

   Dabei können Mengen durchaus wieder andere Mengen enthalten, also

   $$P := \{1, 2, \{4, 5\}, 6, \{7, 8\}\}$$

   Diese Menge hat 5 Elemente.

2. Die Mengen der natürlichen, ganzen, rationalen und rellen Zahlen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$, also z.B.:

   $$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}; \quad \mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}.$$

3. Die Menge aller Studenten der TU Chemnitz (derzeit ca. 11000).

4. Die Menge aller Atome auf der Erde (ca. $10^{50}$).

5. Die Menge aller Atome im Universum (ca. $10^{80}$).

6. Die leere Menge, welche keine Elemente enthält. Man schreibt

   $$M = \varnothing = \{\}.$$

Man beachte, dass nicht jede Sammlung von Objekten eine Menge ist, würde man das zulassen, käme man zu logischen Problemen. Zum Beispiel könnte man die Menge aller Mengen, welche sich nicht selbst enthalten, betrachten, und es käme heraus, dass diese Menge sich gleichzeitig enthält und auch nicht enthält. Dies ist die sogenannte *Russelsche Antinomie* (nach dem Mathematiker und Philosophen Bertrand Russel).
Viele neue Mengen enstehen als Teilmenge einer gegebenen Menge. Eine Menge $A$ ist Teilmenge oder Untermenge einer Menge $M$, falls alle Elemente aus $A$ auch Elemente in $M$ sind. Man schreibt dann $A \subset M$. Man beachte, dass dies auch den Fall $A = M$ einschließt. Möchte man dies nicht, d.h., ist $A$ eine Teilmenge von $M$, aber nicht gleich $M$, dann schreibt man $A \subsetneq M$, und sagt, dass $A$ eine echte Teilmenge von $M$ ist. Ist eine feste Menge $M$ vorgegeben, so definiert man die *Potenzmenge* von $M$ als

$$\mathcal{P}(M) := \{A \subset M\}\,.$$

Es braucht vielleicht einen Moment, um diese Definition zu verstehen. Die Elemente von $\mathcal{P}(M)$ sind selbst wieder Mengen (wie in dem Beispiel $\{1, 2, \{4, 5\}, 6, \{7, 8\}\}$ weiter oben), und zwar genau *alle* Teilmengen von

$M$. Ist also zum Beispiel $M = \{1, 2\}$, dann ist $\mathcal{P}(M) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. Ist hingegen $M = \{1, 2, 3\}$, dann hat $\mathcal{P}(M)$ schon acht Elemente, nämlich $\mathcal{P}(M) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.
Häufig definiert man Teilmengen durch eine logische Bedingung, d.h., man sagt, die Teilmenge besteht aus allen Elementen, welche eine vorgegebenen Bedingung erfüllen. Beispielsweise definiert man

$$\mathbb{Q}_{>0} := \{x \in \mathbb{Q} \,|\, x > 0\}\,,$$

als die Menge aller positiven rationalen Zahlen. Hier steht vor dem vertikalen Stricht die vorgegebene Menge, und danach die Bedingung, die die Elemente der zu definierenden Teilmenge erfüllen müssen. Analog nennt man $\mathbb{R}_{>0}$ die Menge der positiven reellen Zahlen. Natürlich können wir auch die Mengen

$$\mathbb{Q}_{\geqslant 0} := \{x \in \mathbb{Q} \,|\, x \geqslant 0\}\,; \qquad \mathbb{R}_{\geqslant 0} := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geqslant 0\}$$

der nicht-negativen rationalen bzw. reellen Zahlen definieren. Weiter wichtige Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind Intervalle. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ festgewählte Zahlen, dann definieren wir

$$\begin{array}{lcll} [a,b] & := & \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leqslant x \leqslant b\} & \text{abgeschlossenes Intervall} \\ (a,b] & := & \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x \leqslant b\} & \text{halboffenes Intervall} \\ [a,b) & := & \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leqslant x < b\} & \text{halboffenes Intervall} \\ (a,b) & := & \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\} & \text{offenes Intervall} \end{array}$$

Die folgenden Operationen benutzt man sehr häufig, um aus gegebenen Mengen neue zu konstruieren.

**Definition 2.2.** *Seien $A$ und $B$ Mengen, dann definiert man die Vereinigung von $A$ und $B$ als*

$$A \cup B := \{x \,|\, x \in A \text{ oder } x \in B\},$$

*den Schnitt oder Durchschnitt von $A$ und $B$ als*

$$A \cap B := \{x \,|\, x \in A \text{ und } x \in B\}$$

*sowie die Differenz von $A$ und $B$ als*

$$A \backslash B := \{x \in A \,|\, x \notin B\}\,.$$

*Falls $B$ eine Teilmenge von $A$ ist, dann nennt man die Differenz $A\backslash B$ auch das Komplement von $B$ in $A$ und schreibt $B^c := A\backslash B$ oder auch ausführlicher $\complement_A B$.*

Die Operationen $\cup$ und $\cap$ kann man auch für mehrere Mengen erklären. Sei $I$ eine beliebige Menge, aber nicht-leere Menge, genannt Indexmenge. Insbesondere kann $I$ auch unendlich viele Elemente enthalten. Sei für jedes $i \in I$ eine Menge $A_i$ vorgegeben. Dann definieren wir die Vereinigung bzw. den Durchschnitt $\bigcup_{i\in I} A_i$ und $\bigcap_{i\in I} A_i$ der Mengen $A_i$ durch

$$\begin{array}{lcl} \bigcup_{i\in I} A_i & := & \{a \,|\, \text{es gibt ein } i \in I : a \in A_i\}\,, \\ \bigcap_{i\in I} A_i & := & \{a \,|\, \text{für alle } i \in I : a \in A_i\}\,. \end{array}$$

Falls man diese Operationen mit endlich vielen Mengen durchführt, lassen sie sich graphisch in den sogenannten *Venn-Diagrammen* veranschaulichen (siehe Abbildung 2.1).
**Beispiele für Mengenoperationen:**

1. $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$,
2. $\mathbb{N} = \mathbb{N}_0\backslash\{0\}$,
3. Definiere
$$-\mathbb{N} := \{-n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$$
als die negativen ganzen Zahlen, dann ist
$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N}), \quad \text{sowie} \quad \varnothing = \mathbb{N} \cap (-\mathbb{N}).$$

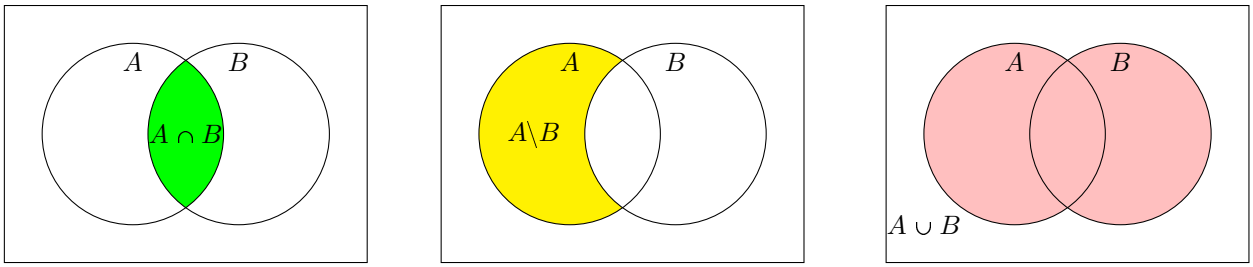



Abbildung 2.1: Operationen mit Mengen.

4. Definiere analog
$$-\mathbb{N}_0 := \{-n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$$
dann ist
$$\mathbb{Z} = \mathbb{N}_0 \cup (-\mathbb{N}_0), \quad \text{sowie} \quad \{0\} = \mathbb{N}_0 \cap (-\mathbb{N}_0).$$

Mit Hilfe von Mengen können wir die vorher eingeführten Symbole für Summen und Produkte etwas verallgemeinern. Wir verwenden hier ausnahmsweise einen Begriff, der erst später erklärt wird, nämlich den einer abzählbaren Menge (siehe Definition 2.15). Beispiele für abzählbare Mengen sind $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, aber nicht $\mathbb{R}$. Auch jede endliche Menge ist abzählbar. Sei also $I$ eine beliebige, aber abzählbare nicht-leere Menge (eventuell unendlich), und sei für jedes $i \in I$ eine Zahl $a_i$ gegeben, dann schreiben wir

$$\sum_{i \in I} a_i \qquad \text{bzw.} \qquad \prod_{i \in I} a_i$$

für die Summe bzw. das Produkt aller Zahlen $a_i$ für alle Elemente aus $i \in I$. Wir definieren auch

$$\sum_{\varnothing} a_i = 0 \qquad \text{und} \qquad \prod_{\varnothing} a_i = 1. \tag{2.1}$$

Die nächste Definition ist eine weitere Möglichkeit, um aus gegebenen Mengen neue zu konstruieren und wird für viele Konstruktionen in der Linearen Algebra wichtig sein.

**Definition 2.3.** *Seien $A$ und $B$ Mengen, welche beide nicht leer sind. Dann definiert man das* kartesische Produkt *oder* Kreuzprodukt *von $A$ und $B$ als*

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A,\, b \in B\}.$$

Aus der Definition des kartesischen Produktes ergibt sich direkt, dass zwei Elemente $(a, b) \in A \times B$ und $(x, y) \in A \times B$ gleich sind genau dann, wenn $a = x$ und $b = y$ gilt. Auch hier können wir natürlich das Kreuzprodukt mehrere Mengen $A_1 \times \ldots \times A_n$ bilden, und, falls eine (eventuell unendliche) Menge $I$ und für alle $i \in I$ Mengen $A_i$ vorgegeben sind, das kartesische Produkt

$$\prod_{i \in I} A_i := \{(x_i)_{i \in I} \mid x_i \in A_i\}\,.$$

Hierbei soll die Notation $(x_i)_{i \in I}$ eine Folge von Elementen $x_i$ sein, wobei jedes einzelne Element (genannt Komponente) $x_i$ in der Menge $A_i$ liegt. Leicht kann man sich dies vorstellen, wenn zum Beispiel $I = \mathbb{N}$ ist und alle $A_i$ gleich einer festen Menge, zum Beispiel $A_i = \mathbb{R}$ sind, dann erhält man tatsächlich eine Folge (zum Beispiel von reellen Zahlen), wie sie in der Analysis betrachtet werden. Manchmal nennt man die Menge $I$ auch eine *Indexmenge*.
Für endliche Mengen $A$ und $B$ kann man sich das kartesische Produkt $A \times B$ auch leicht graphisch vorstellen, nämlich wie in Abbildung 2.2.

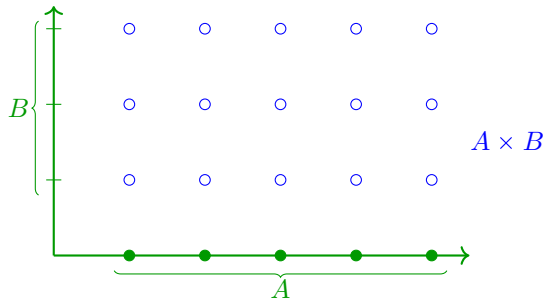



Abbildung 2.2: Das kartesische Produkt zweier Mengen.

Für eine gegebene Menge $A$ kann man natürlich insbesondere das kartesische Produkt $A \times A$, oder auch, für eine natürlich Zahl $n \in \mathbb{N}$, das $n$-fach kartesische Produkt $\underbrace{A \times \ldots \times A}_{n-\text{mal}}$ betrachten. Zur Abkürzung schreiben wir einfach

$$A^n := \underbrace{A \times \ldots \times A}_{n-\text{mal}}.$$

So ist die übliche Ebene einfach $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, und der übliche dreidimensionale Raum ist $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Wir besprechen jetzt eine Konstruktion, welche immer wieder in der Mathematik verwendet wird. Die Idee ist, dass man Objekte, welche in einer bestimmten Eigenschaft übereinstimmen, auch als wirklich gleich ansehen wollen. Dazu führen wir folgenden Beriff ein.

**Definition 2.4.** *Sei $M$ eine Menge. Eine Relation auf $M$ ist eine Teilmenge $R$ von $M \times M$. Für eine gegebene Relation $R \subset M \times M$ und ein Element $(x, y) \in R$ schreibt man auch $x \sim_R y$ (oder einfach $x \sim y$, wenn klar ist, um welche Relation $R$ es geht) und man sagt, dass $x$ zu $y$ in Relation steht.*
*Eine Äquivalenzrelation auf $M$ ist eine Relation $R \subset M \times M$, welche zusätzlich noch die folgenden Eigenschaften erfüllt:*

1. *Für alle $x \in M$ gilt: $x \sim x$, d.h. $(x, x) \in R$ (Reflexivität),*
2. *für alle $x, y \in M$ gilt: $x \sim y$ genau dann, wenn $y \sim x$ (Symmetrie),*
3. *für alle $x, y, z \in M$ gilt: Falls $x \sim y$ und $y \sim z$ gilt, dann folgt $x \sim z$ (Transitivität).*

*Falls $R \subset M \times M$ eine Äquivalenzrelation ist und $(a, b) \in R$ gilt, dann sagen wir, dass $a$ zu $b$ äquivalent ist (oder, dies ist wegen der Symmetrie dasselbe, dass $b$ zu $a$ äquivalent ist).*

**Beispiele für Relationen:**

1. Sei $M = \mathbb{R}$ und sei $R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\}$.
2. Sei $M = \mathbb{Z}$, sei $m \in \mathbb{Z}$ fest vorgegeben, dann sei $x \sim y$ genau dann, wenn $x - y$ durch $m$ teilbar ist, d.h. $R := \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid m | x - y\}$.
3. Sei $M$ die Menge aller Menschen, und sei $x \sim y$ genau dann, wenn $x$ und $y$ Geschwister sind.
4. Sei nun $M = \mathbb{R}^2$, und sei $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$ genau dann, wenn $x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2$.

Das erste Beispiel erfüllt nur die Transitivität, ist also keine Äquivalenzrelation. Das zweite und das vierte Beispiel sind Äquivalenzrelationen, das Dritte nicht, da man nicht sein eigener Bruder bzw. seine eigene Schwester ist.
Elemente einer Menge, welche bezüglich einer Äquivalenzrelation äquivalent zueinander sind, wollen wir identifizieren. Dazu dient die folgende Konstruktion.

**Definition 2.5.** *Sei eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf einer Menge $M$ gegeben (d.h., gegeben ist eine Relation $R \subset M \times M$, welche die obigen drei Bedingungen erfüllt). Sei $y \in M$, dann setzen wir*

$$[y] := \{x \in M \mid x \sim y\}.$$

*Dann ist $[y]$ eine Teilmenge von $M$ und heißt Äquivalenzklasse von $y$ in $M$.*

Im Beispiel zwei nennt man die Äquivalenzklassen auch *Restklassen modulo $m$*, siehe auch die ausführliche Diskussion im nächsten Kapitel im Abschnitt 3.1. Für $m = 3$ gibt es genau drei Äquivalenzklassen, nämlich die durch 3 teilbaren Zahlen, also die Teilmenge $\{\ldots, -6, -3, -0, 3, 6, 9, \ldots\} \subset \mathbb{Z}$, die Zahlen, welche bei Division durch 3 den Rest 1 haben, also $\{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \ldots\} \subset \mathbb{Z}$ sowie die Zahlen, welche Rest 2 modulo 3 haben, also $\{\ldots, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \ldots\} \subset \mathbb{Z}$.
Im obigen Beispiel vier sind die Äquivalenzklassen Kreise um den Ursprung $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$, wie grafisch in Abbildung 2.3 dargestellt.

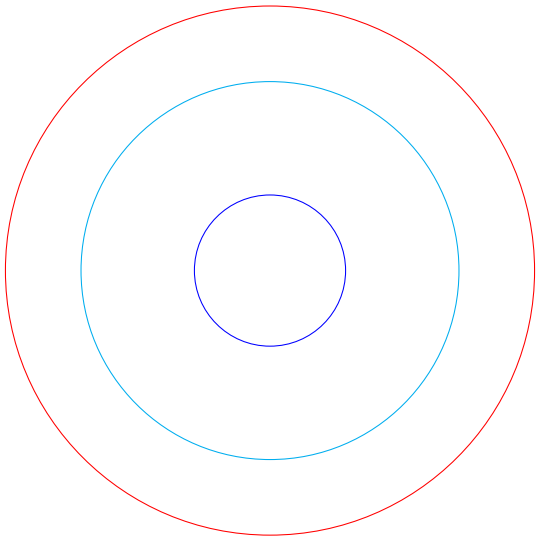


Abbildung 2.3: Äquivalenzklassen.

Man beachte, dass es natürlich hier unendlich viele Äquivalenzklassen gibt, von denen wir nur drei eingezeichnet haben.
Man sieht in beiden Beispielen, dass die Vereinigung der Äquivalenzklassen gleich der Ausgangsmenge $M$ ist, und, dass die Äquivalenzklassen paarweise disjunkt sind, d.h., dass der Schnitt von zwei verschiedenen dieser Teilmengen die leere Menge ist. Dies ist kein Zufall, sondern gilt allgemein.

**Proposition 2.6.** *Sei $M$ eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $M$. Für jedes $y \in M$ bezeichne $[y] \subset M$ wie oben die Äquivalenzklasse von $y$ bezüglich $\sim$. Dann gilt*

1. $M = \bigcup_{y \in M} [y]$,
2. $[x] \cap [y] \neq \varnothing$ *genau dann, wenn $x \sim y$ ist. In diesem Fall ist* $[x] = [y]$.

*Die zweite Aussage bedeutet also, dass Äquivalenzklassen entweder gleich, oder disjunkt sind, d.h., keine Elemente gemeinsam haben.*

*Beweis.* 1. Wegen der Reflexivität der Relation $\sim$ gilt für alle $y \in M$, dass $y \sim y$ ist. Dies bedeutet aber $y \in [y]$, d.h., jedes Element ist in einer Äquivalenzklasse enthalten, damit haben wir also $M = \bigcup_{y \in M} [y]$. Theoretisch könnte ein Element auch in mehreren Äquivalenzklassen enthalten sein, aber die zweite Aussage bedeutet gerade, dass dies nicht der Fall ist.

2. Wir haben mehrere Aussage zu beweisen: Seien $x, y \in M$ gegeben, und nehmen wir an, dass $[x] \cap [y] \neq \varnothing$ gilt, dann existiert also ein $a \in [x] \cap [y]$. Dies bedeutet, dass $a \in [x]$ ist, und das auch $a \in [y]$ gilt, also gilt $a \sim x$ und $a \sim y$. Wegen der Symmetrie folgt $x \sim a$ und $a \sim y$, aber wegen der Transitivität ist dann $x \sim y$ und natürlich auch $y \sim x$. Falls andererseits $x \sim y$ gilt, dann ist $x \in [x]$ (wegen Reflexivität), aber auch $x \in [y]$ (dies folgt direkt aus der Definition von $[y]$), also ist $[x] \cap [y] \neq \varnothing$.

   Wir wollen jetzt $[x] = [y]$ beweisen, dazu müssen wir die zwei Aussage $[x] \subset [y]$ und $[y] \subset [x]$ zeigen. Sei ein Element $c \in [x]$ gegeben, dann ist $c \sim x$, also wegen $x \sim y$ und Transitivität auch $c \sim y$, also $c \in [y]$, dies beweist $[x] \subset [y]$. Analog für die andere Richtung: Ist $c \in [y]$, dann ist $c \sim y$, wegen $y \sim x$ und Transitivität folgt $c \sim x$, also $c \in [x]$, und damit $[y] \subset [x]$.

□

Man kann also durch eine Äquivalenzrelation eine Menge in disjunkte Teilmengen zerlegen. Also Übung überlegen Sie sich bitte, dass dies auch andersherum funktioniert: Ist eine solche Zerlegung gegeben, dann ist die Relation

$$x \sim y \text{ genau dann, wenn } x \text{ und } y \text{ zur gleichen Teilmenge gehören}$$

eine Äquivalenzrelation.
Nun kommen wir zu der angekündigten Konstruktion, welche es erlaubt, äquivalente Elemente einer Menge zu identifizieren. Wir brauchen dabei nur die schon mehrfach erwähnte Tatsache, dass eine Menge auch selbst Mengen als Elemente enthalten kann.

**Definition 2.7.** *Sei $M$ eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $M$. Dann definieren wir*

$$M/\sim := \{[y] \mid y \in M\}$$

*als die Menge der Äquivalenzklassen von $\sim$.*

Man beachte den Unterschied zwischen $M$ und $M/\sim$: $M$ ist Vereinigung der Äquivalenzklassen $[y]$, also $M = \bigcup_{y \in M} [y]$, hingegen ist jede Äquivalenzklasse $[y]$ ein Element aus $M/\sim$. In den obigen Beispielen ist als $\mathbb{R}^2/\sim$ die Menge der Kreise um den Ursprung, und $\mathbb{Z}/\sim$ ist die Menge der möglichen Reste bei Division durch $m$. Insbesondere ist $\mathbb{Z}/\sim$ jetzt eine *endliche* Menge geworden, sie enthält nur noch $m$ Elemente.

## 2.3 Abbildungen

Um nicht nur einzelne Mengen zu betrachten, sondern auch mehrere vergleichen zu können, brauchen wir Abbildungen.

**Definition 2.8.** *Seien $A$ und $B$ Mengen, dann ist eine Abbildung $f : A \to B$ eine Vorschrift, welche jedem Element aus $A$ eindeutig ein Element aus $B$ zuordnet. $A$ heißt der Definitionsbereich und $B$ der Wertebereich von $f$. Das dem Element $x \in A$ durch die Abbildung $f$ zugeordnete Element aus $B$ wird $f(x)$ geschrieben und das Bild oder der Wert von $x$ unter der Abbildung $f$ genannt.*

Häufig schreibt man Abbildungen so

$$\begin{array}{rcl} f : A & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

wobei dann für das Symbol $f(x)$ eine konkrete Vorschrift oder präzise Beschreibung stehen muss, aus der die Definition der Abbildung ersichtlich ist, d.h., aus der ersichtlich ist, wie für ein gegebenes $x \in A$ der Wert $f(x) \in B$ gebildet wird.
Abbildungen zwischen endlichen Mengen kann man ganz einfach durch Bilder symbolisieren (hier eine Abbildung $\{a, b, c\} \to \{1, 2, 3, 4\}$):

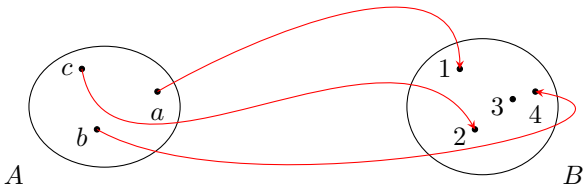



Abbildung 2.4: Abbildung.

Tatsächlich kann man Abbildungen auch nur mit Hilfe von Mengen definieren. Dies geht so:

**Definition 2.9.** *Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Dann heißt die Teilmenge*

$$\Gamma_f := \{(x, f(x)) \in A \times B \,|\, x \in A\} \subset A \times B$$

*der Graph von $f$.*

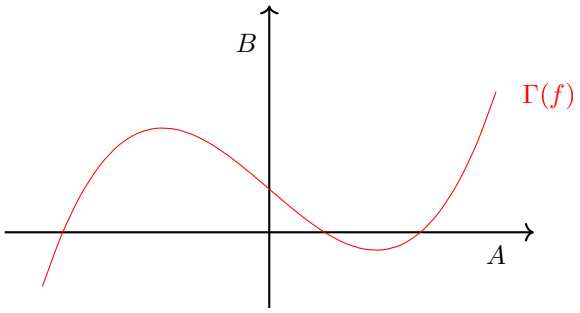



Abbildung 2.5: Graph einer Abbildung.

Der Graph einer Abbildung $f$ hat die folgende wichtige Eigenschaft: Für alle $a \in A$ existiert genau ein $b \in B$, so dass $(a, b) \in \Gamma_f$ gilt. Wie man sich leicht überlegen kann (bitte tun Sie das als Übung), können wir für jede Teilmenge $\Gamma \subset A \times B$, welche diese Eigenschaft hat, eine Abbildung definieren, welche die Menge $\Gamma$ als Graph hat. Also sind Abbildungen spezielle Mengen (wie auch schon Äquivalenzrelationen).
Im Folgenden definieren wir einige Begriffe, die immer wieder im Zusammenhang mit Abbildungen auftreten.

**Definition 2.10.** *Seien $A$ und $B$ Mengen, und $f : A \to B$ eine Abbildung.*

1. *Die Teilmenge $f(A) := \{f(x) \,|\, x \in A\} \subset B$ heißt das Bild von $A$ unter $f$. Man schreibt auch $\mathrm{Im}(f)$ für das Bild („Image“) von $f$.*

2. *Analog definiert man für jede Teilmenge $B' \subset B$ das Urbild von $B'$ unter $f$ als die Teilmenge $f^{-1}(B') := \{x \in A \,|\, f(x) \in B'\}$. Für ein Element $y \in B$ nennt man die Menge $f^{-1}(y) := \{x \in A \,|\, f(x) = y\}$ auch die Faser von $y$ (dies ist nichts anderes als das Urbild $f^{-1}(\{y\})$.*

3. *Wir definieren*

$$Abb(A, B) := \{f : A \to B\}$$

*als die Menge aller Abbildungen von $A$ nach $B$.*

4. *Die Menge $Abb(A, A)$ besitzt immer ein spezielles (man sagt, ein ausgezeichnetes) Element, nämlich die Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{id}_A : A & \longrightarrow & A \\ x & \longmapsto & x \end{array}$$

*welche man die Identität oder die identische Abbildung nennt.*

5. *Sei $f : A \to B$ eine Abbildung, und sei $A' \subset A$ eine Teilmenge. Dann können wir einfach die Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} A' & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

*betrachten, d.h., wir schränken den Definitionsbereich der Abbildung auf die Teilmenge $A'$ ein. Diese neue Abbildung von $A'$ nach $B$ bezeichnet man mit $f_{|A'}$.*

6. *Seien Mengen $A, B, C$ und Abbildungen $f : A \to B$ und $g : B \to C$ gegeben. Dann können wir eine neue Abbildung von $A$ nach $C$, genannt die Verknüpfung oder Komposition von $g$ und $f$ folgendermaßen definieren:*

$$\begin{array}{rcl} A & \longrightarrow & C \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

*Man setzt also das Ergebnis der Abbildung $f$, also den Wert $f(x) \in B$ in die Abbildung $g$ ein, und erhält ein Element von $C$. Daher nennen wir die neu definierte Abbildung $g \circ f : A \to C$. Man beachte die Reihenfolge, diese ist wichtig, denn die Abbildung $f \circ g$ kann gar nicht definiert werden. Zur Veranschaulichung der Verknüpfung von Abbildungen dient das folgende Bild:*

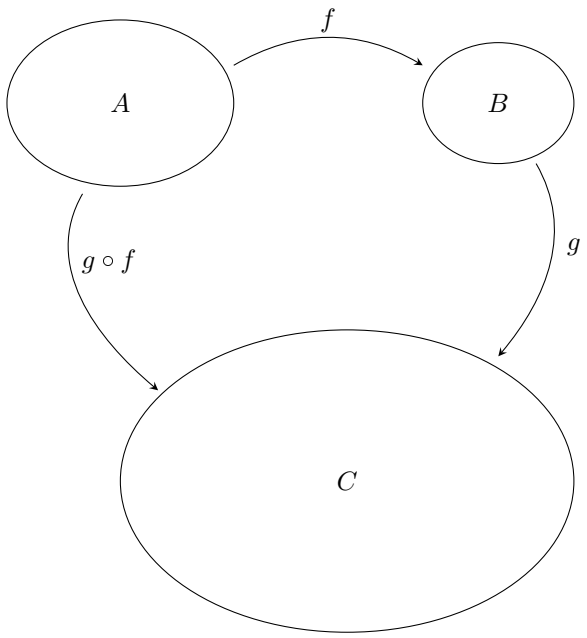



Abbildung 2.6: Komposition von Abbildungen.

*Das eben definierte Verknüpfen von Abbildungen liefert uns eine Abbildung:*

$$\begin{array}{rcl} Abb(A, B) \times Abb(B, C) & \longrightarrow & Abb(A, C) \\ (f, g) & \longmapsto & g \circ f. \end{array}$$

*Als Übung überlegen Sie sich bitte, dass für* drei *Abbildungen $f : A \to B$, $g : B \to C$ und $h : C \to D$ die folgende Regel gilt: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. Außerdem gilt für alle $f : A \to B$, dass $f \circ \mathrm{id}_A = f$ und $\mathrm{id}_B \circ f = f$ ist.*

7. *Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt*

   (a) injektiv *oder eine* Injektion*, falls für alle $x, y \in A$ gilt: Falls $f(x) = f(y)$ ist, dann muss schon $x = y$ sein, anders gesagt, es dürfen keine zwei verschiedenen Elemente aus $A$ auf das gleiche Element aus $B$ abgebildet werden,*

   (b) surjektiv *oder eine* Surjektion*, falls für alle $b \in B$ ein $a \in A$ existiert mit $b = f(a)$, mit anderen Worten, falls für alle $b \in B$ die Faser von $f$ über $b$ nicht leer ist,*

   (c) bijektiv *oder eine* Bijektion*, falls sie injektiv und surjektiv ist.*

Falls eine Abbildung $A \to B$ injektiv ist, dann kürzt man das auch durch $A \hookrightarrow B$ ab, falls sie surjektiv ist, dann schreibt man $A \twoheadrightarrow B$. Jede Teilmenge $A \subset M$ liefert eine injektive Abbildung, nämlich $A \hookrightarrow M, x \mapsto x$. Dies nennt man auch die *Inklusion* von $A$ in $M$. Hat man eine Bijektion $f : A \to B$ gegeben, dann kann man die Mengen $A$ und $B$ in gewisser Weise identifizieren: Wann immer man etwas mit einem Element $x$ von $A$ machen möchte, kann man es auch mit $f(x)$ tun und andersherum. Die folgenden graphischen Beispiele illustrieren die Begriffe injektiv, surjektiv und bijektiv.

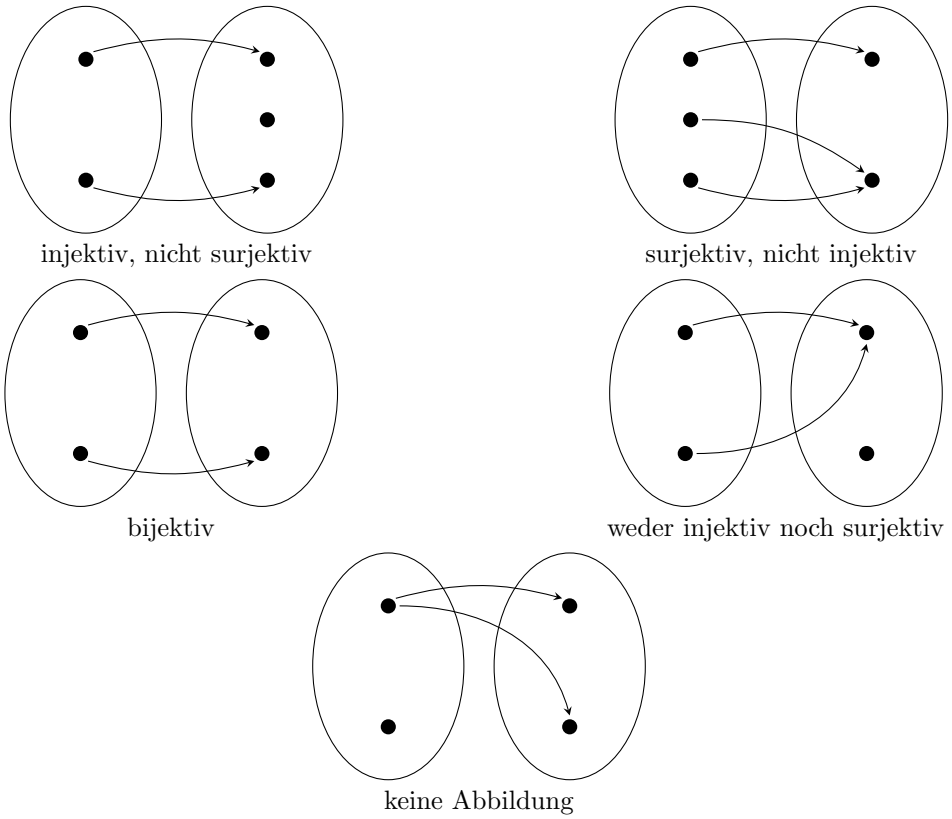



Abbildung 2.7: Eigenschaften von Abbildungen.

Als nächstes beweisen wir einige ganz grundlegende Eigenschaften von injektiven, surjektiven und bijektiven Abbildungen.

**Lemma 2.11.** *Sei eine Abbildung $f : A \to B$ gegeben. Dann gilt:*

1. *$f$ ist injektiv genau dann, wenn es eine Abbildung $g : B \to A$ gibt, so dass $g \circ f = \mathrm{id}_A$ gilt,*
2. *$f$ ist surjektiv genau dann, wenn es eine Abbildung $g : B \to A$ gibt, so dass $f \circ g = \mathrm{id}_B$ gilt,*
3. *$f$ ist bijektiv genau dann, wenn es eine Abbildung $g : B \to A$ gibt, so dass $g \circ f = \mathrm{id}_A$ und $f \circ g = \mathrm{id}_B$ gilt.*

*Im letzten Fall (also wenn $f$ bikjektiv ist), gibt es nur eine einzige Abbildung $g$ mit diesen Eigenschaften, man sagt, die Abbildung $g$ ist eindeutig bestimmt. Sei heißt Umkehrabbildung zu $f$ oder Inverses von $f$, wird meistens mit $f^{-1}$ bezeichnet und ist dann selbst auch bijektiv.*

*Beweis.* 1. Sei $f : A \to B$ injektiv, dann wollen wir ein $g : B \to A$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_A$ konstruieren. Das geht so: Wähle irgendein festes Element $x_0 \in A$. Sei nun $y \in B$, dann gibt es zwei mögliche Fälle: $y \in f(A)$, dann existiert nach der Definition von $f(A)$ ein $x \in A$ mit $f(x) = y$, aber weil $f$ injektiv ist, existiert nur genau ein solches $x$. Dann definieren wir $g(y) := x$. Der zweite mögliche Fall ist, dass $y \notin f(A)$ ist, dann definieren wir $g(y) := x_0$. Damit gilt dann für alle $x \in A$, dass $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x$ ist, denn $y = f(x)$ ist ein Element von $f(A)$ (der erste Fall in der obigen Fallunterscheidung), und dann haben wir $g(y) = x$ definiert. Also ist $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

   Gelte andersherum, dass es ein $g : B \to A$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_A$ gäbe. Seien $a, a' \in A$ gegeben, und nehmen wir an, dass $f(a) = f(a')$ gilt. Dann folgt $g(f(a)) = g(f(a'))$, also $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(a')$, und wegen $g \circ f = id_A$ folgt dann $a = a'$. Also ist $f$ injektiv.

2. Sei $f : A \to B$ surjektiv, dann gibt es für jedes $b \in B$ ein $a \in A$ mit $f(a) = b$. Dann können wir für dieses $b$ einfach $g(b) := a$ setzen, wobei $a \in f^{-1}(b)$ irgendein Element aus der Faser von $f$ über $b$ ist (wichtig ist nur, dass diese nicht die leere Menge ist, dies ist genau durch die Surjektivität gewährleistet). Dann gilt: $(f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(a) = b$, da $a$ aus der Faser $f^{-1}(b)$ gewählt war. Da diese Gleichheit $(f \circ g)(b) = b$ für alle $b \in B$ gilt, haben wir damit $f \circ g = \mathrm{id}_B$ gezeigt.

   Sei andererseits die Existenz von $g : B \to A$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_B$ vorausgesetzt. Sei $b \in B$, dann müssen wir zeigen, dass es ein $a \in A$ mit $f(a) = b$ gibt. Aber das gibt es, nämlich $a := g(b)$, denn $f(g(b)) = (f \circ g)(b) = \mathrm{id}_B(b) = b$. Damit ist $f$ surjektiv.

3. Dies folgt direkt aus der Definition der Bijektivität. Klar ist auch, dass es im Fall, dass $f$ bijektiv ist, für die Konstruktion von $g : B \to A$ in Teil 1. und 2. jeweils nur eine Wahl gibt. Damit ist die Abbildung $g$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_A$ und $f \circ g = \mathrm{id}_B$ eindeutig bestimmt.

□

Die Konstruktion von Äquivalenzklassen aus dem letzten Abschnitt (siehe Definition 2.7) liefert eine wichtige Abbildung.

**Proposition 2.12.** *Sei $M$ eine Menge, und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $M$. Betrachte die Menge $M/\!\sim$ der Äquivalenzklassen, dann definiert*

$$\begin{array}{rcl} \pi : M & \longrightarrow & M/\!\sim \\ x & \longmapsto & [x] \end{array}$$

*eine surjektive Abbildung. Das Urbild $\pi^{-1}([x])$ eines Elementes $[x] \in M/\!\sim$ unter $\pi$ ist genau die Äquivalenzklasse $[x] = \{y \in M \mid x \sim y\}$, gesehen als Teilmenge von $M$.*

*Beweis.* Zu beweisen ist nur, dass die definierte Abbildung surjektiv ist. Sei eine Äquivalenzklasse $[x] \in M/\!\sim$ gegeben, dann wählen wir ein Element $y$ (genannt Repräsentant) aus der *Menge* $[x] \subset M$ aus, und offensichtlich ist dann $\pi(y) = [y] = [x]$ (wegen Proposition 2.6, Teil 2.). □

Es ist sehr wichtig, die zweite Aussage dieser Proposition, also den Unterschied von $[x]$ als Teilmenge von $M$ sowie $[x]$ als Element von $M/\sim$ genau zu verstehen, um später mit der Konstruktion von Äquivalenzklassen arbeiten zu können.
Abschließend wollen wir den Begriff der Bijektivität noch dazu nutzen, um unendliche Menge zu vergleichen. Zunächst haben wir das folgende Lemma, dessen Beweis wir in die Übungen vertragen, weil es dazu noch einer Methode bedarf, welche erst im nächsten Abschnitt behandelt wird.

**Lemma 2.13.** *Sei eine Bijektion $\{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,m\}$ gegeben, mit $m,n \in \mathbb{N}_0$. Dann folgt $m = n$.*

Wegen dieses Lemmas macht die folgende Definition Sinn.

**Definition 2.14.** *Eine endliche Abzählung einer Menge $M$ ist eine bijektive Abbildung $\{1,\dots,n\} \to M$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Eine Menge $M$ heißt endlich, falls $M$ leer ist oder falls es eine endliche Abzählung von $M$ gibt, und dann sei*

$$\#M := |M| := \text{ die Zahl } n \text{ so dass es eine endliche Abzählung } \{1,\dots,n\} \to M \text{ gibt}$$

*die Anzahl der Elemente von $M$.*

Es ist aus dem Lemma klar, dass es keine zwei Abzählungen $\phi : \{1,\dots,n\} \to M$ und $\psi : \{1,\dots,m\} \to M$ mit $m \neq n$ geben kann, denn dann wäre $\psi^{-1} \circ \phi : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,m\}$ eine Bijektion. Klar ist auch, dass zwei endliche Mengen gleich viele Elemente haben genau dann, wenn es eine Bijektion zwischen ihnen gibt. Dies können wir auf unendliche Mengen (d.h. solche, die keine endliche Abzählung haben) verallgemeinern.

**Definition 2.15.**
1. *Zwei Mengen $A$ und $B$ heißen gleichmächtig, falls es eine Bijektion $A \to B$ (äquivalent dazu, eine Bijektion $B \to A$) gibt.*
2. *Eine Menge $M$ heißt abzählbar, falls sie entweder endlich oder zu $\mathbb{N}$ gleichmächtig ist, d.h., falls es eine Bijektion $\mathbb{N} \to M$ gibt. Ist $M$ unendlich und gibt es solch eine Bijektion nicht, dann heißt $M$ überabzählbar.*

Die auf den ersten Blick erstaunliche Tatsache ist, dass viele Mengen abzählbar sind, sogar solche, welche $\mathbb{N}$ als echte Teilmenge enthalten.

**Satz 2.16.**
1. *Die Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind abzählbar.*
2. *Die Menge $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar.*

Aus der zweiten Aussage folgt, dass auch jede Menge, welche welche $\mathbb{R}$ enthält, nicht abzählbar ist (zum Beispiel die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$, siehe Definition 3.15 im nächsten Kapitel).

*Beweis.* Das $\mathbb{N}$ selbst abzählbar ist, folgt aus der Definition, die identische Abbildung $\mathrm{id}_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist natürlich eine Bijektion. Interessanter ist schon die Abzählbarkeit von $\mathbb{N}_0$, denn es gilt ja $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N}_0$. Trotzdem ist die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{N}_0 & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array}$$

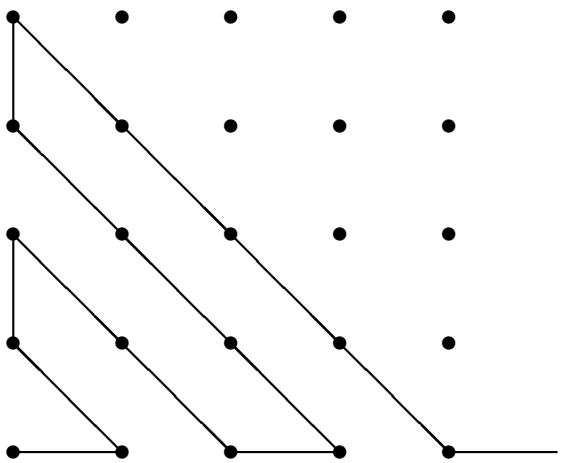
eine Bijektion, denn sie ist offensichtlich injektiv und surjektiv. Klar ist, dass so etwas wegen des Lemmas oben bei endlichen Mengen nicht passieren kann, eine echte Teilmenge kann zu der Menge, in der sie enthalten ist, nicht bijektiv sein.
Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{N}_0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} -\frac{n}{2} & \text{falls } n \text{ gerade ist} \\ \frac{n+1}{2} & \text{falls } n \text{ ungerade ist} \end{cases} \end{array}$$

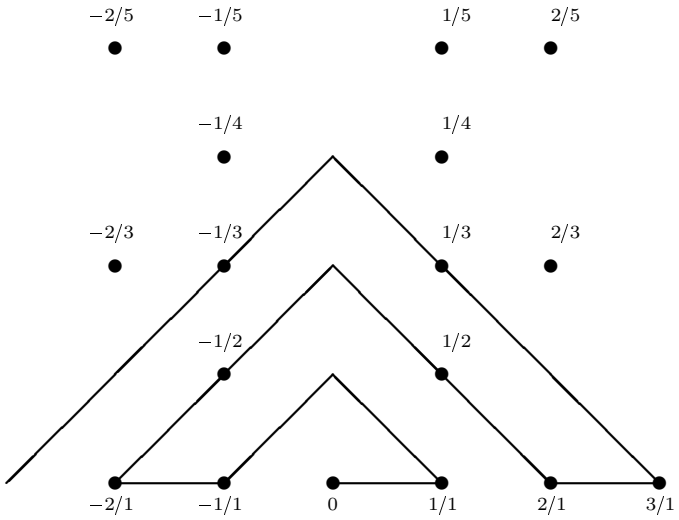
ist bijektiv, und da $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}_0$ gleichmächtig sind, sind es auch $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$. Anschaulich sieht diese Abbildung so aus

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & 0 \\ 1 & \longrightarrow & 1 \\ 2 & \longrightarrow & -1 \\ 3 & \longrightarrow & 2 \\ 4 & \longrightarrow & -2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Um die Gleichmächtigkeit von $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ zu beweisen, zeigen wir zunächst, dass es eine Bijektion $\mathbb{N}$ mit $\mathbb{N}^2$ gibt. Dazu schreiben wir alle Elemente in $\mathbb{N}^2$ auf einem Gitter auf, und verbinden diese wie angegeben



Nun laufen wir entsprechend dem eingezeichneten Pfad, und wann immer wir einen Punkt treffen, zählen wir eine Zahl in $\mathbb{N}$ weiter. Damit erhalten wir eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}^2$. Analog konstruiert man eine Bijektion $\mathbb{N} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Jetzt können wir uns die Menge $\mathbb{Q} = \{p/q \,|\, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ als Teilmenge von $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ vorstellen, bei denen man kürzbare Brüche (wie $2/4$) streicht. Um diese abzuzählen, schreiben wir einfach alle Brüche (auch die kürzbaren) in ein Schema, welches $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ entspricht, zeichnen einen „Weg“ ein, aber wir zählen beim Durchlaufen nur die Brüche, die nicht schon in gekürzter Form durchlaufen wurden (alle die im Bild, die durch einen schwarzen Punkt gekennzeichnet sind).




Die letzte Aussage ist, das so etwas für die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ nicht möglich ist. Natürlich reicht es, zu beweisen, dass es keine Abzählung des Intervalls $[0,1]$ geben kann. Der Beweis geht so: Angenommen, wir hätten eine Bijektion $\mathbb{N} \to [0,1]$ gefunden. Das heißt nichts anderes, als das wir die reellen Zahlen zwischen 0 und 1 durchnummerieren können: $[0,1] = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Dann schreiben wir die Dezimalenentwicklungen untereinander auf

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \ldots \\ x_2 &= 0, a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \ldots \\ x_3 &= 0, a_{31}\, a_{32}\, a_{33} \ldots \\ &\vdots \end{aligned} \tag{2.2}$$

hierbei sind $a_{ij} \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ die Ziffern. Damit diese Darstellung eindeutig ist, wollen wir immer Zahlen wie $1,450000\ldots$ als $1,44999999999\ldots$ schreiben. Dann bilden wir eine neue reelle Zahl $b := 0, b_1\, b_2\, b_3\, \ldots$, wobei wir nur verlangen, dass für jedes $i$ gilt $b_i \neq a_{ii}$. So eine Zahl $b$ können wir immer bilden, aber es ist klar, dass $b$ nicht in der obigen Aufzählung vorkommen kann, denn wenn $b$ gleich irgendeinem $x_i$ wäre, dann müsste $b_i = a_{ii}$ sein, und das ist nicht der Fall. Also kann es so eine Aufzählung nicht geben, und damit ist $[0,1]$ und daher auch $\mathbb{R}$ überabzählbar. □

## 2.4 Aussagenlogik und Beweismethoden

Wir haben in den letzten Abschnitten schon Beweise geführt, und dabei unbewusst viele Tatsachen der Aussagenlogik verwendet. Wir wollen diese hier aber noch einmal systematisch zusammenstellen, und dabei auch noch einmal erklären, wie man eigentlich einen Beweis führt.
Wir haben oben heuristisch, d.h., nicht ganz mathematisch streng erklärt, was eine Menge ist. Genauso machen wir es jetzt mit Aussagen.

**Definition 2.17.** *Eine logische Aussage ist eine Äußerung, die ohne jeden Zweifel entweder wahr oder falsch ist.*

Beispiele für logische Aussagen begegnen uns auf Schritt und Tritt, und wir haben auch in dieser Vorlesung schon ganz viele verwendet. Hier sind einige weitere:

1. „$2 > 1$“: offensichtlich wahr

2. „$-2 > 1$“: offensichtlich falsch

3. „Heute ist Montag“: je nachdem, welcher Tag ist, entweder wahr oder falsch (aber niemals beides gleichzeitig)

4. „$\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$“: falsch (wird vielleicht in der Analysis-Vorlesung behandelt).

In vielen Situationen hängt der Wahrheitsgehalt einer Aussage stark davon ab, auf welche Objekte sich die Aussage bezieht, typischerweise sind dies Elemente einer Menge, und dann ist es ein großer Unterschied, ob die Aussage für alle Elemente, für einige, oder vielleicht nur für ein einzelnes gelten soll. Daher führt man folgende nützliche Abkürzungen ein, genannt *Quantoren*.

1. $\forall$ bedeutet: für alle,

2. $\exists$ bedeutet: es gibt ein,

3. (eine Variante des letzten Quantors): $\exists!$ bedeutet: es gibt genau ein,

4. (eine inoffizielle Abkürzung, die manchmal verwendet wird): $\nexists$ bedeutet: es gibt kein

Hier einige Beispiele zur Verwendung von Quantoren:

1. $\forall x \in \mathbb{N} : x > 0$,

2. $\exists x \in \mathbb{N}_0 : x \in -\mathbb{N}_0$ (nämlich das Element $x = 0$),

3. es gilt sogar: $\exists! x \in \mathbb{N}_0 : x \in -\mathbb{N}_0$

4. andererseits gilt: $\nexists x \in \mathbb{N} : x \in -\mathbb{N}$.

Alle diese vier Beispiele sind wahre Aussagen, und natürlich werden wir im weiteren Verlauf des Textes nur noch wahre Aussagen aufschreiben (falls nicht, wird das explizit gesagt, und dient eventuell der Illustration von möglichen Irrtümern oder Fehlern, die an einer bestimmten Stelle vorkommen können).
Durch Verknüpfen von logischen Aussagen erhält man neue Aussage. Implizit haben wir dies im ersten Kapitel und in den oben stehenden Abschnitten dieses Kapitels immer schon gemacht, aber hier definieren wir die wichtigsten Verknüpfungen noch einmal präzise.

**Definition 2.18.** *Seien $A$ und $B$ Aussagen, dann schreiben wir*

1. *$A \Longrightarrow B$: Aus $A$ folgt $B$ (diese Verknüpfung heißt auch Implikation).*

2. *$A \Longleftrightarrow B$: $A$ genau dann, wenn $B$ (diese Verknüpfung heißt auch Äquivalenz), ausführlicher könnte man schreiben: $A$ ist genau dann wahr, wenn $B$ wahr ist, aber $A$ und $B$ sollen Variablen für Aussagen sein, d.h., $A$ und $B$ nehmen die Werte „wahr“ oder „falsch“ an, und dann beinhaltet der Satz „$A$ genau dann, wenn $B$“ auch die Aussage „$A$ ist genau dann falsch, wenn $B$ falsch ist“,*

3. *$A \vee B$: $A$ oder $B$,*

4. *$A \wedge B$: $A$ und $B$*

5. *$\neg A$: nicht $A$ (Negation).*

Man kann den Wahrheitsgehalt von solchen (und auch komplizierten) Verknüpfungen in *Wahrheitstabellen* darstellen, bzw., bei gegebenen Aussagen $A$ und $B$ den Wahrheitswert einer durch logische Verknüpfung entstandenen Aussage mit solch einer Tabelle überprüfen. Hier ist ein Beispiel

| $A$ | $B$ | $A \wedge B$ | $A \vee B$ | $A \Rightarrow B$ | $A \Leftrightarrow B$ | $\neg A$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $w$ | $w$ | $w$ | $w$ | $w$ | $w$ | $f$ |
| $w$ | $f$ | $f$ | $w$ | $f$ | $f$ | $f$ |
| $f$ | $w$ | $f$ | $w$ | $w$ | $f$ | $w$ |
| $f$ | $f$ | $f$ | $f$ | $w$ | $w$ | $w$ |

Bitte überlegen Sie sich sehr genau, wie die Verteilung der Buchstaben $w$ und $f$ zustande kommt, z.B., warum die Aussage $A \Rightarrow B$ nur dann falsch ist, wenn $A$ wahr und $B$ falsch ist.
Mit solchen Wahrheitstabellen beweist man:

**Proposition 2.19.** *Die folgenden Aussagen sind unabhängig vom Wahrheitswert von $A$, $B$ und $C$ immer wahr.*

1. $A \vee \neg A$,
2. $\neg(\neg A) \Longleftrightarrow A$,
3. $(A \wedge B) \Longleftrightarrow (B \wedge A)$, $(A \vee B) \Longleftrightarrow (B \vee A)$,
4. $\neg(A \wedge B) \Longleftrightarrow \neg A \vee \neg B$,
5. $\neg(A \vee B) \Longleftrightarrow \neg A \wedge \neg B$,
6. $(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow (\neg B \Longrightarrow \neg A)$ *(dies ist die sogenannte Kontraposition)*,
7. $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Longrightarrow (A \Rightarrow C)$ *(Kettenschluß)*,
8. $A \wedge (A \Rightarrow B) \Longrightarrow B$ *(Modus ponendo ponens)*,
9. $\neg B \wedge (A \Rightarrow B) \Longrightarrow \neg A$ *(Modus tollendo tollens)*.

*Beweis.* Wir beweisen hier nur die Kontraposition, alle anderen Aussagen lassen sich genauso durch Aufstellen der Wahrheitstabelle überprüfen.

| $A$ | $B$ | $\neg A$ | $\neg B$ | $A \Rightarrow B$ | $\neg B \Rightarrow \neg A$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $w$ | $w$ | $f$ | $f$ | $w$ | $w$ |
| $w$ | $f$ | $f$ | $w$ | $f$ | $f$ |
| $f$ | $w$ | $w$ | $f$ | $w$ | $w$ |
| $f$ | $f$ | $w$ | $w$ | $w$ | $w$ |

Man sieht, dass die letzten beiden Spalten gleich sind, und daher sind die Aussagen $A \Rightarrow B$ und $\neg B \Rightarrow \neg A$ äquivalent. □

Die gerade bewiesene Kontraposition wird sehr häufig in Beweisen verwendet. Viele mathematische Aussagen sind in der Form einer Implikation $A \Rightarrow B$ gegeben, wobei die Aufgabe darin besteht, aus der Gültigkeit von $A$ nur unter Zuhilfenahme logischer Ableitungen die Gültigkeit von $B$ zu zeigen. Sehr häufig ist es einfacher, umgekehrt vorzugehen: Man zeigt nur unter Verwendung von logischen Schlüssen, dass aus der Aussage $\neg B$ die Aussage $\neg A$ folgt, und dann ist die gewünschte Implikation $A \Rightarrow B$ auch bewiesen.
Verwandt dazu ist das ebenfalls sehr häufig verwendete Prinzip des *indirekten Beweises*. Man kann nämlich ebenso wie oben die Kontraposition beweisen, dass die Äquivalenz

$$(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow (\neg(A \wedge \neg B))$$

gilt. Dies bedeutet, dass man folgendermaßen vorgehen kann: Man nimmt an, dass $A$ gilt, und das gleichzeitig $B$ nicht gilt, dass also $\neg B$ gilt. Dann leitet man aus dieser Annahme durch logische Schlüsse einen Widerspruch her, d.h., eine Aussage, welche immer falsch ist. Somit weiß man dass die Aussage $A \wedge \neg B$ falsch war, dass also $\neg(A \wedge \neg B)$ wahr ist, und dies ist, wie gerade erwähnt, das gleiche wie die gewünschte Implikation $A \Longrightarrow B$. Im Satz 2.16, 2., haben wir genau so etwas gemacht und damit bewiesen, dass $\mathbb{R}$ überabzählbar ist: Wir wollten eigentlich die folgende Aussage zeigen: Sei $M = [0,1]$, dann existiert keine Bijektion $\mathbb{N} \to M$. Die Aussage $\neg B$ ist dann: Es existiert eine Bijektion $\mathbb{N} \to M$ (dies war Aufzählung in den Gleichungen (2.2)), und es kam heraus, dass die Menge $M$ dann gar nicht $[0,1]$ ist, denn wir konnten ein Element konstruieren, welches nicht in dieser Aufzählung vorhanden ist. Diese Art von Beweis werden wir immer wieder verwenden.

**Bemerkung:** Wie eben gesehen, muss man häufig die Negation einer Aussage bilden. Dann ist es ganz wichtig, eventuell vorhandene Quantoren richtig zu setzen. Konkret ist es so, dass die Quantoren $\forall$ (für alle) und $\exists$ (es gibt ein) durch Negation ausgetauscht werden. Sei zum Beispiel für gewisse Mengen $A, B$ die Aussage $A \subset B$ gegeben. Dies kann man ausführlicher als die Aussage: $\forall x \in A : x \in B$ formulieren. Die Negation davon ist die Aussage, dass $B$ nicht in $A$ enthalten ist, manchmal als $A \not\subset B$ geschrieben. Die Negation der ausführlichen Version wäre: $\exists x \in A : x \notin B$. In der Tat reicht es, dass ein Element von $A$ nicht in $B$ ist, damit die Aussage $A \subset B$ nicht mehr wahr ist. Analog wird aus der falschen Aussage $\exists m \in \mathbb{Z} : m^2 < 0$ durch Negation die wahre Aussage $\forall m \in \mathbb{Z} : m^2 \geqslant 0$.
Als Abschluss dieses Abschnitts und des ganzen Kapitels wollen wir die Beweismethode der *vollständigen Induktion* diskutieren. Diese ist eng verwandt mit einer axiomatischen Charakterisierung der natürlichen Zahlen, welche wir hier der Vollständigkeit halber noch aufführen wollen. Es handelt sich um die sogenannten *Peano-Axiome*, welche man als eine Art Definition der natürlichen Zahlen auffassen kann:

1. Die 1 ist ein Element der natürlichen Zahlen.
2. Jede natürliche Zahl $n$ hat einen Nachfolger, genannt $\nu(n)$.
3. $\forall n \in \mathbb{N} : \nu(n) \neq 1$, d.h., das Element 1 ist kein Nachfolger.
4. $\forall n, m \in \mathbb{N} : \nu(n) = \nu(m) \Longrightarrow n = m$, d.h., die Nachfolgerfunktion $\nu$ ist injektiv.
5. Sei $S \subset \mathbb{N}$ eine Teilmenge mit folgenden Eigenschaften:
   (a) $1 \in S$,
   (b) $\forall n \in S : \nu(n) \in S$.

   Dann gilt $S = \mathbb{N}$.

Man kann zeigen, dass jede Menge $M$ mit einem ausgezeichneten Element $1 \in M$ und einer Abbildung $\nu : M \to M$, so dass $(M, 1, \nu)$ die obigen Axiome erfüllen, im Wesentlichen die Menge der natürlichen Zahlen ist. Das wollen wir hier nicht weiter vertiefen. Stattdessen kommen wir nun zum Beweisverfahren der vollständigen Induktion.

**Satz 2.20.** *Sei für alle natürlichen Zahlen $n$ eine Aussage $A(n)$ gegeben, d.h., der Wahrheitswert von $A(n)$ hängt von der Zahl $n$ ab. Angenommen, es würde gelten:*

1. *$A(1)$ ist eine wahre Aussage.*
2. *Falls $A(n)$ wahr ist, dann ist auch $A(n+1)$ wahr. Anders (und kürzer) geschrieben: $\forall n \in \mathbb{N} : A(n) \Longrightarrow A(n+1)$.*

*Dann ist $A(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.*

*Beweis.* Wir verwenden das letzte Peano-Axiom: Sei $S$ die Menge

$$S := \{n \in \mathbb{N} \,|\, A(n) \text{ ist wahr } \}.$$

Dann gilt natürlich $S \subset \mathbb{N}$, und $1 \in S$, da die Aussage $A(1)$ wegen der ersten Voraussetzung wahr sein soll. Ist nun $n \in S$, d.h., ist $A(n)$ wahr, dann sagt die zweite Voraussetzung, dass dann auch $A(n+1)$ wahr sein soll, also folgt $n + 1 \in S$. Aus dem letzten Peano-Axiom schlußfolgern wir also, dass $S = \mathbb{N}$ ist, und das bedeutet genau, dass $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr ist. □

Der Sinn der vollständigen Induktion besteht darin, dass man, statt direkt die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zeigen zu müssen, nur die (möglicherweise einfacher zu beweisende) Implikation $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ zeigen muss, und die konkrete Aussage $A(1)$. In der Praxis schreibt man einen Beweis mittels vollständiger Induktion meist folgendermaßen auf (wenn Sie einmal verstanden haben, wie so ein Beweis genau abläuft, müssen sie ihn auch nicht exakt so aufschreiben, aber zumindest der Gedankengang sollte in etwa so ablaufen):

1. *Induktionsanfang*: Hier wird die Gültigkeit der Aussage $A(1)$ verifiziert.

2. *Induktionsvoraussetzung*: Für eine beliebige, aber feste Zahl $n \in \mathbb{N}$ wird die Gültigkeit der Aussage $A(n)$ angenommen. Zur Erleichterung des Verständnisses kann man diese noch einmal aufschreiben.

3. *Induktionsschritt*: Hier wird durch logische Schlüsse aus der Induktionsvoraussetzung hergeleitet, dass die Aussage $A(n+1)$ gilt.

Zur Illustration betrachten wir einige Beispiele:

1. Für alle natürlichen Zahlen $n$ gilt: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n \cdot (n+1)$. Mit dieser Formel beeindruckte der junge Carl Friedrich Gauss seinen Mathematiklehrer, als dieser seinen Schülern die Aufgabe stellte, die Zahlen 1, 2, ..., 100 aufzusummieren, und Gauss nach wenigen Augenblicken die richtige Antwort 5050 gab. Mit vollständiger Induktionen läuft der Beweis so:

   (a) *Induktionsanfang*: Für $n = 1$ steht auf der linken Seite der zu beweisenden Gleichung der Ausdruck $\sum_{i=1}^{1} i$. Dieser ist offensichtlich gleich 1. Auf der rechten Seite steht $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2$, dies ist auch gleich 1. Für $n = 1$ stimmt die Gleichung also.

   (b) *Induktionsvoraussetzung*: Wir nehmen für ein festes $n \in \mathbb{N}$ an, dass die Gleichung

   $$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n \cdot (n+1)$$

   gilt.

   (c) *Induktionsschritt*: Aus der Induktionsvoraussetzung können wir durch Addieren auf beiden Seiten die Gleichheit

   $$\left(\sum_{i=1}^{n} i\right) + (n+1) = \left(\frac{1}{2}n \cdot (n+1)\right) + n + 1$$

   folgern. Jetzt formen wir die beiden Seiten dieser Gleichung um, und erhalten

   $$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{1}{2}n \cdot (n+1) + \frac{2(n+1)}{2} \overset{(*)}{=} \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot (n+2)\,,$$

   wobei wir im Schritt (*) einfach den Term $\frac{1}{2}(n+1)$ ausgeklammert haben. Damit haben wir die Gleichheit $\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot (n+2)$ hergeleitet, dies ist aber genau die Aussage $A(n+1)$, wenn $A(n)$ die zu beweisende Gleichung ist.

2. In analoger Weise wie im ersten Beispiel wollen wir die Gleichung

   $$\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$$

   beweisen. Mit anderen Worten, wir wollen die Aussage: die Summer der ersten $n$ ungeraden Zahlen ist gleich $n^2$ zeigen. Wir schreiben den Beweis etwas kürzer auf: Der Induktionsanfang ist die Aussage $1 = 1$, diese stimmt. Sei also die Formel für ein festes $n$ bewiesen, und wir wollen zeigen, dass dann die gleiche Formel, wenn wir $n$ durch $n+1$ ersetzen, gilt. Mit anderen Worten, wir müssen die Gültigkeit der Implikation

   $$\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2 \quad \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n+1} (2i-1) = (n+1)^2$$

   beweisen.

Aus $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$ folgt

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(2i-1)\right) + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1$$

also wegen der binomischen Formel und weil $2n + 1 = 2(n + 1) - 1$ gilt, dass

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(2i-1)\right) + 2(n+1) - 1 = (n+1)^2$$

ist. Also haben wir

$$\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) = (n+1)^2$$

und das ist genau, was zu zeigen war.

3. Für jede reelle Zahl $x \neq 1$ gilt

$$\sum_{i=0}^{n-1} x^i = \frac{1-x^n}{1-x}$$

(das funktioniert auch für komplexe Zahlen, siehe das nächste Kapitel). Induktionsanfang: Für $n = 1$ haben wir die Gleichung $1 = \frac{1-x}{1-x}$, diese ist offensichtlich richtig. Sei also die Formel für festes $n$ bewiesen, dann folgt

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1} x^i\right) + x^n = \frac{1-x^n}{1-x} + x^n,$$

also

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1-x^n}{1-x} + \frac{(1-x)x^n}{1-x} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

und damit ist der Induktionsschritt bewiesen.

4. Es gibt viele Varianten der vollständigen Induktion, natürlich kann man den Anfangswert variieren (z.B. die Aussage $A(0)$ beweisen, und dann erhält man die Gültigkeit für von $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$), oder aber *absteigende Induktion* benutzen: Statt die Implikation $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ zeigt man die umgekehrte Implikation $A(n+1) \to A(n)$ sowie als Induktionsanfang die Aussage $A(k)$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Dann erhält man die Gültigkeit von $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \leqslant k$.

   Eine weitere Variante ist die folgende, bei der wir die bekannte Aussagen: „Jede natürliche Zahl ist als Produkt von Primzahlen darstellbar“ aus der elementaren Zahlentheorie beweisen wollen. Zur Erinnerung: Eine Primzahl ist eine natürliche Zahl größer als 1, welche nur durch sich selbst und durch 1 teilbar ist. Als Produkt wollen wir auch das Produkt aus nur einer Zahl oder sogar aus gar keiner Zahl ansehen, in letztem Fall ist das Produkt dann per Definition gleich 1 (siehe auch die Konventionen für das Produktsymbol aus dem letzten Abschnitt, genauer, Formel (2.1)).

   Damit ist der Induktionsanfang für den Beweis des Satzes klar: nach Konvention ist die natürlich Zahl 1 als Produkt von 0 Primzahlen darstellbar. Als Induktionsannahme dient nun die folgende Aussage: Sei $n \in \mathbb{N}$ fest gewählt, dann nehmen wir an, dass für alle $k \leqslant n$ die Aussage gilt, d.h., alle natürlichen Zahlen $k$, welche kleiner oder gleich $n$ sind, sollen sich als Produkt von Primzahlen schreiben lassen. Wir müssen nun zeigen, dass dies auch für $n + 1$ gilt. Falls $n + 1$ selbst eine Primzahl ist, dann sind wir fertig, denn dann ist $n + 1$ nach Konvention Produkt von einer Primzahl (nämlich sich selbst). Falls nun $n + 1$ keine Primzahl ist, dann muss es sich als $n + 1 = a \cdot b$ schreiben lassen, wobei $a$ und $b$ natürliche Zahlen mit $1 < a, b < n + 1$ sind (sonst wäre $n + 1$ eine Primzahl). Sowohl für $a$ also auch für $b$ wenden wir dann die Induktionsvoraussetzung an, d.h., wir können annehmen, dass sich beide

als Produkt von Primzahlen schreiben lassen, also etwa $a = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$ und $b = p'_1 \cdot \ldots \cdot p'_l$. Dann erhalten wir eine Zerlegung $n+1 = (p_1 \cdot \ldots \cdot p_k) \cdot (p'_1 \cdot \ldots \cdot p'_l)$, also ist $n+1$ als Produkt von Primzahlen darstellbar.

Man bemerke, dass wir bei diesem Beweis nicht strikt der Aussage des Satzes 2.20, also dem Prinzip der vollständigen Induktion in seiner ursprüngliche Form gefolgt sind, denn wir haben bei der Induktionsannahme mehr vorausgesetzt, also im Satz 2.20 vorkommt. Aber es ist natürlich klar, dass wir damit trotzdem die Konklusion (also die Gültigkeit der Aussage $A(n)$) erhalten, man könnte einfach eine Variante des Satzes 2.20 formulieren, welche die hier benötigte Beweistechnik liefert.

# Kapitel 3

# Algebraische Grundbegriffe

Mit diesem Kapitel startet der „eigentliche“ Stoff der linearen Algebra. Wie der Name schon sagt, handelt es sich um ein Teilgebiet der Algebra, welches Sie allerdings erst später (im 4. Semester) genauer kennenlernen werden. Trotzdem muss man, um lineare Algebra betreiben zu können, einige ganz wichtige algebraische Konstruktionen einführen und verstehen. Dies wollen wir in diesem Kapitel tun. Gruppen, Ringe und Körper sind aufeinander aufbauende Konzepte. Wir wollen die Definitionen, einige wichtige Eigenschaften und typische Beispiele kennenlernen.

## 3.1 Gruppen

Eine Gruppe ist eine Menge mit einer Zusatzstruktur, genannt Verknüpfung. Dies wollen wir zuerst erklären.

**Definition 3.1.** *Sei $G$ eine beliebige Menge. Dann ist eine Verknüpfung $*$ eine Abbildung*

$$* : G \times G \to G$$

*Wie im letzten Kapitel erklärt, müsste man also für zwei Elemente $a, b \in G$ für das Ergebnis der Verknüpfung eigentlich $*(a, b)$ schreiben. Dies ist aber etwas umständlich, und daher bezeichnen wir üblicherweise das Bild von $(a, b) \in G \times G$ unter der Abbildung $*$ mit $a * b$.*

Hier sind einige Beispiele für Verknüpfungen:

1. Sei $G$ einer der Mengen $\mathbb{N}$ (natürliche Zahlen), $\mathbb{Z}$ (ganze Zahlen), $\mathbb{Q}$ (rationale Zahlen), $\mathbb{R}$ (reelle Zahlen), oder auch eine der Mengen $\mathbb{Q}^* := \{q \in \mathbb{Q} \,|\, q \neq 0\}$, $\mathbb{R}^* := \{r \in \mathbb{R} \,|\, q \neq 0\}$ oder $\mathbb{Q}_{>0} := \{q \in \mathbb{Q} \,|\, q > 0\}$, $\mathbb{R}_{>0} := \{r \in \mathbb{R} \,|\, q > 0\}$. Dann definiert man für zwei Elemente $a, b \in G$:

   $$a * b := a + b \qquad \text{oder} \qquad a * b := a \cdot b$$

   Dann ist in allen Fällen $*$ eine Verknüpfung auf $G$, ausser für $G = \mathbb{Q}^*$ und $G = \mathbb{R}^*$ sowie $* = +$: Hat man nämlich $a, -a \in \mathbb{Q}^*$ (bzw. $a, -a \in \mathbb{R}^*$) dann ist $a * (-a) = a + (-a) = 0$, und 0 ist nach Definition kein Element mehr von $\mathbb{Q}^*$ bzw $\mathbb{R}^*$.

2. Ein etwas komplizierteres Beispiel einer Verknüpfung entsteht folgendermaßen: Sei $M$ eine beliebige Menge, dann betrachten wir die Menge $G := \mathrm{Abb}(M, M)$. Ein Element von $G$ ist also eine Abbildung $f : M \to M$. Wir haben im letzten Kapitel gesehen, dass man Abbildungen verknüpfen kann, also definieren wir eine Verknüpfung auf $G$ durch

   $$f * g := f \circ g$$

   Man beachte, dass hier anders als im ersten Beispiel die Verknüpfung von der Reihenfolge abhängt, denn $f \circ g$ ist im Allgemeinen nicht dasselbe wie $g \circ f$.

3. Wir können das letzte Beispiel etwas modifizieren, indem wir die folgende Teilmenge von $G$ betrachten:

$$S(M) := \{f \in \mathrm{Abb}(M,M) \mid f \text{ ist bijektiv } \} \subset \mathrm{Abb}(M,M)$$

   Man kann beweisen (Übung), dass die Komposition $f \circ g$ von zwei bijektiven Abbildungen wieder bijektiv ist, also ist $* := \circ$ auch eine Verknüpfung auf der kleineren Menge $S(M)$. Man nennt die Elemente der Menge $S(M)$, also bijektive Abbildungen von $M$ auf sich selbst *Permutationen* von $M$.

4. Eine leichte Modifikation des ersten Beispiels ist die folgende Definition für den Fall $G = \mathbb{Q}$ oder $G = \mathbb{R}$:

$$a * b := \frac{1}{2}(a+b)$$

Gruppen sind nun einfach Mengen mit Verknüpfungen, welche besonders schöne Eigenschaften erfüllen.

**Definition 3.2.** *Sei $G$ eine Menge und $* : G \times G \to G$ eine Verknüpfung auf $G$. Dann heißt das Paar $(G,*)$ eine Gruppe, falls die folgenden Eigenschaften $G1, G2, G3$, genannt Gruppenaxiome, gelten:*

**G1** *: $\forall a,b,c \in G : a*(b*c) = (a*b)*c$ (**Assoziativität**),*

**G2** *: $\exists e \in G : \forall a \in G : e*a = a$ (**neutrales Element**),*

**G3** *: $\forall a \in G : \exists a' \in G : a'*a = e$ (**inverses Element**).*

*Falls noch das Axiom*

**G4** *: $\forall a,b, \in G : a*b = b*a$ (**Kommutativität**)*

*gilt so nennt man $(G,*)$ eine abelsche Gruppe (nach dem Mathematiker Niels Henrik Abel).*

Sehr häufig werden sich in diesem Skript oder in jedem anderen mathematischen Text Sätze finden, die so beginnen „Sei $G$ eine Gruppe...“. Das ist streng genommen natürlich falsch, denn wir haben ja gerade definiert, dass eine Gruppe aus einer Menge $G$ *und* einer Verknüpfung $*$ besteht. Andererseits ist es sehr häufig aus dem Kontext klar, welche Verknüpfung gemeint ist, so dass man auch nur die Menge angeben kann. Um den Text lesbarer zu halten, erlaubt man sich häufiger solcher scheinbaren Ungenauigkeiten. Wichtig ist dabei natürlich immer, dass man durch Nachdenken und eventuelles Hinzufügen oder Präzisieren von Notationen jedem Ausdruck oder Symbol, welcher in einem mathematischen Text vorkommt, eine eindeutige und klare Bedeutung zuordnen kann.
**Beispiele:** Wir diskutieren zunächst, welche der oben angegebenen Verknüpfungen Gruppen sind.

1. Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ ist zusammen mit der Addition eine Gruppe (geschrieben $(\mathbb{Z},+)$), ebenso die rationalen oder rellen Zahlen. Selbstverständlich gilt in diesen Fällen die Assoziativität, also das Axiom G1. Das neutrale Element ist immer die Zahl 0, und das inverse Element einer Zahl $a$ (also $a \in \mathbb{Z}$, oder $a \in \mathbb{Q}$ oder $a \in \mathbb{R}$) ist die Zahl $-a$. Diese Gruppen erfüllen alle auch das Axiom G4, sind also abelsch. Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ ist keine Gruppe mit der Addition als Verknüpfung: Das neutrale Element wäre wieder das Element $0 \in \mathbb{N}$, aber außer 0 selbst hat kein Element ein Inverses. Keine der Mengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$ ist zusammen mit der Multiplikation eine Gruppe. Die Axiome G1, G2 (mit der Zahl 1 also neutralem Element) und sogar G4 gelten natürlich für die Multiplikation, aber die Zahl 0 hat kein inverses Element bezüglich der Multiplikation, genauer, es gibt kein $a$ in $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$, für das $a \cdot 0 = 1$ gilt. Betrachtet man hingegen die Mengen $\mathbb{R}^*$ oder auch $\mathbb{Q}^*$, so sieht man leicht (Übungsaufgabe: Prüfen Sie die Gruppenaxiome), dass $(\mathbb{R}^*,\cdot)$ sowie $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$ abelsche Gruppen sind. Für $G = \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ funktioniert dies nicht, weil ausser den Elementen 1 und $-1$ keine ganze Zahl ein Inverses bezüglich der Multiplikation innerhalb der Menge $\mathbb{Z}$ besitzt. Ganz leicht zeigt man, dass $(\mathbb{Q}_{>0},\cdot)$ sowie $(\mathbb{R}_{>0},\cdot)$ auch abelsche Gruppen sind.

2. Sei wie oben $G := \mathrm{Abb}(M, M)$ mit Verknüpfung $* := \circ$. In diesem Beispiel ist das Axiom G1 erfüllt, und auch G2, wobei das neutrale Element durch die identische Abbildung $\mathrm{id}_M \in G$ gegeben ist. Aber natürlich gilt im Allgemeinen nicht G3: Falls $f \in G$ gegeben ist, dann folgt, wie in Lemma 2.11 gesehen, aus der Existenz einer Abbildung $g \in G$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_M$, dass $f$ injektiv ist. Falls $f$ also nicht injektiv ist, dann kann so ein $g$ nicht existieren. Also ist $(\mathrm{Abb}(M, M), \circ)$ keine Gruppe.

3. In diesem Beispiel haben wir das Problem aus 2. beseitigt, denn für bijektive Abbildungen existiert nach Lemma 2.11 immer eine Umkehrabbildung, und diese ist genau die Inverse bezüglich $\circ$. Damit ist die Menge $(S(M), \circ)$ eine Gruppe. Wir werden später sehen, dass diese nicht abelsch ist für alle Mengen $M$, die mehr als zwei Elemente enthalten.

4. Die Verknüpfung $a * b := \frac{1}{2}(a + b)$ auf $\mathbb{Q}$ ist kommutativ, aber zum Beispiel nicht assoziativ, und es gibt auch kein neutrales Element, also definiert diese Verknüpfung keine (weitere) Gruppenstruktur auf $\mathbb{Q}$.

In den obigen Beispielen wurde die Verknüpfung, welche nach Definition immer $*$ heisst, unterschiedlich geschrieben. In den Zahlbereichen $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ hat man die natürlich gegebenen Verknüpfungen $+$ und $\cdot$, auf der Menge $S(M)$ hingegen die Verknüpfung $\circ$. Natürlich dürfen wir die Verknüpfung in einer Gruppe schreiben, wie wir wollen, wenn denn die Axiome G1-G3 erfüllt sind. Tatsächlich schreibt man auch bei einer abstrakten Gruppe die Verknüpfung häufig multiplikativ, d.h. mit „$\cdot$“, und häufig kürzt man den Ausdruck $a \cdot b$ einfach durch $ab$ ab, wie bei der normalen Multiplikation in den bekannten Zahlenbereichen. Falls man doch einmal das Symbol $+$ für die Verknüpfung einer Gruppe benutzt, dann sagt man, dass die Verknüpfung *additiv* geschrieben wird. Bei einer additiv geschriebenen Verknüpfung setzt man meistens stillschweigend voraus, dass auch G4 gilt, dass also die Gruppe auch abelsch ist.
In der Definition einer Gruppe wird nicht ausdrücklich gefordert, dass das neutrale Element eindeutig bestimmt ist, und auch nicht, dass für jedes Gruppenelement das inverse Element eindeutig bestimmt ist. Tatsächlich braucht man das nicht zu fordern, denn es folgt schon aus den Axiomen (und es ist ein allgemeines Prinzip in der Mathematik, immer nur minimale Anforderungen zu stellen, und alles, was man logisch ableiten kann, auch wirklich abzuleiten, und nicht extra in Definitionen aufzunehmen). Dies beweisen wir jetzt.

**Lemma 3.3.** *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Dann gilt*

1. *Das neutrale Element $e \in G$ ist eindeutig bestimmt und erfüllt auch die Gleichung $a \cdot e = a$ für alle $a \in G$ (auch wenn die Gruppe nicht abelsch ist).*

2. *Für jedes $a \in G$ ist das inverse Element $a' \in G$ eindeutig bestimmt und erfüllt (auch für $G$ nicht abelsch) auch die Gleichung $a \cdot a' = e$. Wegen der Eindeutigkeit kann man das Inverse mit $a^{-1}$ bezeichnen (bzw. mit $-a$, falls die Verknüpfung additiv geschrieben wird), so dass dann gilt $a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = e$.*

3. *Für alle $a, b \in G$ gilt*
$$(a^{-1})^{-1} = a \qquad \text{und} \qquad (a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$$

4. *Für alle $a, x, \widetilde{x}, y, \widetilde{y} \in G$ gelten die folgenden Aussagen:*
$$\begin{aligned} a \cdot x = a \cdot \widetilde{x} &\implies x = \widetilde{x} \\ y \cdot a = \widetilde{y} \cdot a &\implies y = \widetilde{y} \end{aligned}$$
*Diese Aussagen werden als* Kürzungsregeln *bezeichnet.*

*Beweis.* 1. Wir zeigen zunächst, dass jedes neutrale Element $e \in G$ auch die Gleichung $a \cdot e = e$ erfüllt, die Eindeutigkeit beweisen wir später. Sei also $e \in G$ ein neutrales Element, d.h., ein Element, für das $e \cdot a = a$ für alle $a \in G$ gilt. Sei $a'$ ein inverses Element zu $a$ und sei $a''$ ein inverses Element zu $a'$, dann gilt
$$a \cdot a' = e \cdot (aa') = (a''a')(aa') = a''(a'(aa')) = a''(a'a)a' = a'' \cdot e \cdot a' = a'' \cdot a' = e$$

Damit können wir jetzt $a \cdot e$ berechnen:

$$a \cdot e = a \cdot (a'a) = (aa')a = e \cdot a = a$$

Hierbei ist folgt die vorletzte Gleichung aus dem, was gerade vorher bewiesen wurde, und die letzte ist genau die Definition des neutralen Elements (also Axiom G2). Nun beweisen wir die Eindeutigkeit: Angenommen, es gäbe zwei neutrale Elemente $e$ und $e'$. Dann gilt folgendes:

$$e = e' \cdot e = e'$$

Die erste Gleichheit ist das Axiom G2 für das neutrale Element $e'$ (angewendet auf das Gruppenelement $a = e$), und die zweite Gleicheit ist die eben bewiesene zusätzliche Eigenschaft eines neutralen Elementes (hier wieder für $e'$). Damit ist die Eindeutigkeit des neutralen Elementes bewiesen.

2. Seien nun für $a \in G$ zwei inverse Elemente $a', \tilde{a}'$ gegeben, d.h., es soll $a'a = e$ und $\tilde{a}'a = e$ gelten. Dann ist
$$\tilde{a}' = \tilde{a}'e = \tilde{a}'(aa') = (\tilde{a}'a)a' = ea' = a'$$
und somit ist auch das inverse Element jedes Elementes $a \in G$ eindeutig bestimmt, weswegen wir es $a^{-1}$ nennen können. Die letzte Aussage von 2. (dass auch $a \cdot a^{-1} = e$ gilt) haben wir schon in 1. bewiesen.

3. Wir haben eben gesehen, dass für $a \in G$ die Gleichung $a \cdot a^{-1} = e$ gilt, also ist $a$ das (eindeutig bestimmte) inverse Element zu $a^{-1}$, dies bedeutet aber nichts anderes als $(a^{-1})^{-1} = a$.

   Für $a, b \in G$ gilt
$$(b^{-1}a^{-1})(ab) = b^{-1}(a^{-1}a)b = b^{-1}eb = b^{-1}b = e$$
   und daher ist $b^{-1}a^{-1}$ das inverse Element zu $ab$, also gilt $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

4. Wir können die Gleichung $a \cdot x = a \cdot \tilde{x}$ von links mit dem Element $a^{-1}$ multiplizieren, und erhalten die Gleichung $x = \tilde{x}$. Analog können wir die Gleichung $y \cdot a = \tilde{y} \cdot a$ von rechts mit $a^{-1}$ multiplizieren, und erhalten $y = \tilde{y}$, wie gewünscht.

□

Wir können neue Beispiele für *endliche* Gruppen (d.h., Gruppen, bei denen die zugrundeliegende Menge endlich viele Elemente hat) durch Angabe einer *Verknüfungstafel* konstruieren. Wenn die Menge $G$ aus den Elementen $a_1, \ldots, a_n$ besteht, dann ist eine Verknüpfungstafel ein quadratisches Schema

| $\cdot$ | $\cdots$ | $a_j$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $\vdots$ | | | |
| $a_i$ | | $a_i \cdot a_j$ | |
| $\vdots$ | | | |

in dem in der $i$-ten Zeile und der $j$-ten Spalte das Ergebnis der Verknüpfung $a_i \cdot a_j$ steht. Einen Teil der Gruppenaxiome kann man an einer Verknüpfungstafel direkt ablesen: G2 bedeutet, dass in der Zeile, in welcher ganz links das neutrale Element steht, einfach eine Kopie der Kopfzeile zu finden ist, analog muss in der Spalte, welche unter dem neutralen Element steht, genau die gleiche Reihenfolge wie bei der Spalte ganz links zu finden sein. Auch das Axiom G3 läßt sich leicht prüfen, es bedeutet, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte jedes Gruppenelement genau einmal vorkommt, dass also jede Zeile oder Spalte eine Permutation der Menge $G$ ist.
Mit diesen einfachen Regeln können wir schon sehen (bitte überlegen Sie sich dies als Übungsaufgabe), dass es im Wesentlichen nur eine endliche Gruppe mit 2 Elementen (genannt $\mathbb{Z}_2$), und im Wesentlichen auch nur eine endliche Gruppe mit 3 (genannt $\mathbb{Z}_3$) Elementen gibt, für die die Verknüpfungstafeln wie folgt aussehen.

Man beachte, dass in beiden Fällen auch G4 erfüllt ist, es handelt sich also um abelsche Gruppen, weswegen wir die Verknüpfung additiv schreiben.

$\mathbb{Z}_2$ :

| + | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

$\mathbb{Z}_3$ :

| + | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 2 | 0 |
| 2 | 2 | 0 | 1 |

Zu diesen Tabellen sind noch zwei Bemerkungen angebracht: Natürlich könnte man auch eine andere Menge als $\{1, 2\}$ bzw. $\{1, 2, 3\}$ mit zwei bzw. drei Elementen betrachten und sich fragen, ob es darauf eine Gruppenstruktur gibt, also eine Verknüpfung, welche die Axiome G1-G3 erfüllt. Man wird aber sehen, dass die Struktur sich nicht ändert: wenn man die Gruppenelemente umbenennt, und dies auch auch im Inneren der Verknüpfungstafel tut, erhält man die gleiche Tafel. Dies war mit der Aussage, dass es „im Wesentlichen“ nur eine Gruppenstruktur auf $\{1, 2\}$ bzw. $\{1, 2, 3\}$ gibt, gemeint. Die zweite Bemerkung ist, dass wir in beiden Fällen Verknüpfungen haben, die ganz ähnlich wie die Addition funktionieren, bei denen wir aber modulo 2 bzw modulo 3 rechnen, daher ist in der ersten Gruppe eben z.B. $1 + 1 = 0$ gilt. Wir werden diese beiden Bemerkungen gleich etwas präziser fassen. Vorher soll aber noch gesagt werden, dass es zwei verschiedene Gruppenstrukturen auf der Menge $\{0, 1, 2, 3\}$ gibt, nämlich:

$\mathbb{Z}_4$ :

| + | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 0 |
| 2 | 2 | 3 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 0 | 1 | 2 |

$\mathbb{F}_4$ :

| + | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 1 | 0 | 3 | 2 |
| 2 | 2 | 3 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 2 | 1 | 0 |

Hier kann man mit etwas Mühe sehen, dass man die eine Struktur nicht durch Umbenennen aus der anderen erhalten kann. Die erste Gruppe heißt wieder $\mathbb{Z}_4$, die zweite nennen wir (im Vorgriff auf den nächsten Abschnitt) $\mathbb{F}_4$.
Um Gruppen besser studieren zu können, müssen wir spezielle Abbildungen zwischen ihnen betrachten.

**Definition 3.4.** *1. Sei $(G, *)$ eine Gruppe und $G' \subset G$ eine Teilmenge. Dann heisst $G'$ Untergruppe von $G$, falls die folgenden Eigenschaften (genannt Untergruppenaxiome) gelten:*

**(U1)** *$e \in G'$, hierbei ist $e$ das neutrale Element der gegebenen Gruppe $G$,*

**(U2)** *Für alle $a, b \in G'$ ist $a * b \in G'$ (man beachte, dass die Elemente $a, b \in G'$ natürlich auch Elemente in $G$ sind, und man daher die Verknüpfung $a * b$ betrachten kann, diese ist nach Definition ein Element von $G$, und der Inhalt des Axioms ist, dass es sich auch um ein Element von $G'$ handelt),*

**(U3)** *Für alle $a \in G'$ ist $a^{-1} \in G'$.*

*2. Seien $(G, *)$ und $(H, \circ)$ zwei Gruppen (da wir hier verschiedene Gruppen in Zusammenhang setzen wollen, ist es wichtig, die Verknüpfungen genau zu unterscheiden, daher wählen wir für die Verknüpfung in $G$ und $H$ unterschiedliche Symbole). Sei $f : G \to H$ eine Abbildung. Dann heißt $f$ ein Gruppenhomomorphismus, falls für alle $a, b \in G$ gilt*

$$f(a * b) = f(a) \circ f(b). \tag{3.1}$$

*Man beachte, dass dies eine Gleicheit von Elementen von $H$ ist.*

*Sei $f$ ein Gruppenhomomorphismus, und sei die Abbildung $f$ bijektiv. Dann heißt $f$ ein Gruppenisomorphismus.*

Um diese Begriffe etwas besser zu verstehen, beweisen wir zunächst einige direkte Schlußfolgerungen aus den Definitionen.

**Lemma 3.5.** *1. Sei $(G, *)$ eine Gruppe, und $G' \subset G$ eine Untergruppe. Dann ist $G'$ zusammen mit der aus $G$ kommenden Verknüpfung $*$ selbst eine Gruppe (daher kommt auch der Name Untergruppe). Man schreibt dann auch $(G', *) \subset (G, *)$, oder auch $(G', *) < (G, *)$ oder kürzer $G < G'$,*

*2. Für eine Untergruppe $(G', *) \subset (G, *)$ ist die Abbildung $G' \to G, x \mapsto x$ ein Gruppenhomomorphismus.*

*3. Sei $f : (G, *) \to (H, \circ)$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann gilt:*

*(a) $f(e_G) = e_H$, hierbei ist $e_G$ das neutrale Element in der Gruppe $G$ und $e_H$ das neutrale Element in der Gruppe $H$.*

*(b) Für alle $a \in G$ gilt $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$, man beachte, dass hierbei das inverse Element einmal in $G$ (nämlich das inverse Element zu $a$) und einmal in $H$ (nämlich das inverse Element zu $f(a)$) genommen wird.*

*(c) Falls $f$ ein Gruppenisomorphismus ist, dann ist die Umkehrabbildung $f^{-1} : H \to G$ (diese existiert, da nach Definition $f$ bijektiv ist), auch ein Gruppenhomomorphismus und dann natürlich auch ein Gruppenisomorphismus.*

*Beweis.* 1. Zunächst bemerkt man, dass $*$ wegen des Axioms $U2$ wirklich eine Verknüpfung auf der Menge $G'$ definiert. Wir müssen also nur noch die Axiome G1, G2 und G3 für die Menge $G'$ und die Verknüpfung $*$ prüfen. Das Axiom $G1$ gilt, denn wenn wir drei Elemente aus $G'$ betrachten, dann sind es auch Elemente aus $G$ und für $G$ und $*$ gilt die Assoziativität, weil $(G, *)$ als Gruppe vorausgesetzt wird. Das Axiom $G2$ gilt für $G'$ und $*$, denn wegen $U1$ ist das neutrale Element der Gruppe $G$ in $G'$ enthalten, und erfüllt dort natürlich auch die Eigenschaft G2 für alle Elemente von $G'$. Schließlich gilt auch G3 für die Menge $G'$: Wenn man ein $a \in G'$ betrachtet, dann ist $a$ auch ein Element von $G$, d.h., in $G$ existiert ein (eindeutig bestimmtes) inverses Element $a^{-1}$. Das Axiom $U3$ sagt gerade aus, dass dieses Element $a^{-1}$ dann auch in $G'$ liegen muss.

2. Da die Verknüpfung in $G'$ die gleiche wie in $G$ ist, gilt die definierende Eigenschaft für Gruppenhomomorphismen (also Gleichung (3.1)) für die Abbildung $G' \to G, x \mapsto x$, also ist diese ein Gruppenhomomorphismus.

3. (a) Es gilt $e_H \circ f(e_G) = f(e_G)$, weil $e_H$ das neutrale Element in $H$ ist. Andererseits ist $e_G = e_G * e_G$, also auch $f(e_G) = f(e_G \circ e_G)$. Schließlich folgt aus der Homomorphismuseigenschaft von $f$, dass $f(e_G \circ e_G)$ gilt, also insgesamt

$$e_H \circ f(e_G) = f(e_G) = f(e_G * e_G) = f(e_G) \circ f(e_G)$$

Jetzt wenden wir die Kürzungsregel (siehe Lemma 3.3, Teil 4.) an, welche uns sagt, dass aus $e_H \circ f(e_G) = f(e_G) \circ f(e_G)$ die Gleichheit $e_H = f(e_G)$ folgt, was zu beweisen war.

(b) Wir haben $e_H = f(e_G) = f(a^{-1} * a) = f(a^{-1}) \circ f(a)$, hierbei folgt das letzte Gleichheitszeichen wieder aus der Tatsache, dass $f$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Die damit hergeleitete Gleichheit $f(a^{-1}) \circ f(a) = e_H$ bedeutet aber nichts anderes, als das $f(a^{-1})$ das inverse Element von $f(a)$ in der Gruppe $(H, \circ)$ ist, und genau dies besagt die Gleichung $(f(a))^{-1} = f(a^{-1})$.

(c) Wir rechnen Gleichung (3.1) für die Abbildung $f^{-1} : H \to G$ nach: Seien $c, d$ Elemente von $H$, da $f$ bijektiv ist, existieren eindeutig bestimmte Elemente $a, b \in G$, so dass $c = f(a)$ und $d = f(b)$ gilt (dann sind natürlich $a$ und $b$ genau die Bilder von $c$ und $d$ unter der Abbildung $f^{-1}$). Dann ist $f(a * b) = c \circ d$, aber auf diese Gleichung können wir die Abbildung $f^{-1}$ anwenden, und dann erhalten wir

$$f^{-1}\left(f(a * b)\right) = f^{-1}(c \circ d)$$

Natürlich ist $f^{-1}\left(f(a * b)\right) = (f^{-1} \circ f)(a * b) = \mathrm{id}_G(a * b) = a * b = f^{-1}(c) * f^{-1}(b)$, also bekommen wir insgesamt

$$f^{-1}(c) * f^{-1}(b) = f^{-1}(c \circ d)$$

und dies ist exakt die Eigenschaft, die die Abbilung $f^{-1} : H \to G$ zu einem Gruppenhomomorphismus macht. Da $f$ als Abbildung bijektiv ist, ist auch $f^{-1}$ bijektiv, und damit ist $f$ nach Definition ein Gruppenisomorphismus.

□

Wir diskutieren einige Beispiele für Untergruppen und Gruppenhomomorphismen.

1. Die injektiven Abbildungen $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$, $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$, welche jeweils $x$ auf sich selbst abbilden, sind alles Gruppenhomomorphismen bezüglich der Veknüpfung + auf allen diesen Mengen. Daher sind $(\mathbb{Z}, +) \subset (\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{Z}, +) \subset (\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{Q}, +) \subset (\mathbb{R}, +)$ jeweils Untergruppen.

2. Wir haben auch injektive Abbildungen bzw. Inklusionen $\{0, 1\} \subset \{0, 1, 2\}$, $\{0, 1\} \subset \{0, 1, 2, 3\}$ und $\{0, 1, 2\} \subset \{0, 1, 2, 3\}$. Wenn wir die oben durch Verknüpfungstafeln eingeführten Gruppenstrukturen auf diesen Menge betrachten, dann ist nur $\mathbb{Z}_2 \subset \mathbb{F}_4$ eine Untergruppe, nicht aber $\mathbb{Z}_2 \subset \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_3 \subset \mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_3 \subset \mathbb{F}_4$ und auch nicht $\mathbb{Z}_2 \subset \mathbb{Z}_4$. Bitte überlegen Sie sich Begründungen für diese Aussagen als Übung. Um zum Beispiel zu zeigen, dass eine Teilmenge $G'$ keine Untergruppe von $G$ ist, kann man die Aussagen aus dem obigen Lemma verwenden, dass dann die Inklusionsabbildung $G' \subset G$ ein Gruppenhomomorphismus sein muss. Zum Beispiel kann man sehen, dass $\mathbb{Z}_2 \subset \mathbb{Z}_4$ keine Untergruppe ist, weil in $\mathbb{Z}_2$ die Gleichung $1 + 1 = 0$ gilt, aber nicht in $\mathbb{Z}_4$, dies kann nicht sein, da 0 in beiden Gruppen das neutrale Element ist.

3. Auch die identische Abbildung auf der Menge $\{0, 1, 2, 3\}$ ist kein Gruppenhomomorphismus $\mathbb{Z}_4 \to \mathbb{F}_4$. Es gibt aber solche Gruppenhomomorphismen, der vielleicht einfachste ist $f : \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{F}_4, x \mapsto 0\ \forall x \in \mathbb{Z}_4$.

4. Aus der Schule (oder bald aus der Analysis-Vorlesung) kennen Sie die Exponentialfunktion

$$\begin{array}{rccc} exp : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_{>0} \\ x & \longmapsto & e^x \end{array}$$

   Dann sagt das Exponentialgesetz $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ genau, dass diese Abbildung einen Gruppenhomomorphismus $(\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ ist. Da die Abbildung bijektiv ist, handelt es sich sogar um einen Gruppenisomorphismus.

5. Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2$, welche definiert ist durch

$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x \text{ gerade ist} \\ 1 & \text{falls } x \text{ ungerade ist} \end{cases}$$

   Dann sieht man sofort, dass $f$ ein Gruppenhomomorphismus $(\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}_2, +)$ ist. Ananlog konstruiert man Gruppenhomomorphismen $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_3$ bzw. $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_4$, indem man eine ganze Zahl auf ihren Rest bei Division durch 3 bzw. 4 abbildet. Dieses Beispiel werden wir etwas weiter unten verallgemeinern.

Wir führen noch zwei weitere sehr wichtige Begriffe im Zusammenhang mit Gruppenhomomorphismen ein.

**Definition 3.6.** *Sei $f : (G, *) \to (H, \circ)$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann heißt*

$$\ker(f) := \{x \in G \,|\, f(x) = e_H\}$$

*der Kern von $f$ und*

$$\mathrm{Im}(f) := \{y \in H \,|\, \exists x \in G : f(x) = y\}$$

*das Bild von $f$. Man beachte, dass das Bild eines Gruppenhomomorphismus nichts anderes als das Bild von $f$ als Abbildung von $G$ nach $H$ ist (siehe Definition 2.10).*

Bild und Kern eines Gruppenhomomorphismus haben die folgenden Eigenschaften.

**Lemma 3.7.** *Sei $f : (G, *) \to (H, \circ)$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann ist* $\ker(f)$ *eine Untergruppe von $G$, und* $\mathrm{Im}(f)$ *ist eine Untergruppe von $H$. $f$ ist surjektiv, genau dann wenn* $\mathrm{Im}(f) = H$ *ist, und $f$ ist injektiv, genau dann, wenn* $\ker(f) = \{e_G\}$ *gilt.*

*Beweis.* Zuerst beweisen wir, dass $\ker(f) \subset G$ eine Untergruppe ist: Wir haben in Lemma 3.5, 3.(a) gesehen, dass $f(e_G) = e_H$ gilt. Daher ist das Axiom U1 erfüllt. Seien $a, b \in \ker(f)$, d.h., $f(a) = f(b) = e_H$. Da $f$ ein Gruppenhomomorphismus ist, gilt dann $f(a * b) = f(a) \circ f(b) = e_H \circ e_H = e_H$, also ist $a * b \in \ker(f)$, d.h., es gilt das Axiom U2. Außerdem haben wir in Lemma 3.5, 3.(b) schon bewiesen, dass $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ ist, also ist für $a \in \ker(f)$ wegen $f(a) = e_H$ auch $f(a^{-1}) = e_H$, und damit $a^{-1} \in \ker(f)$, und damit gilt auch U3. Als nächstes zeigen wir, dass $(\mathrm{Im}(f), \circ) \subset (H, \circ)$ eine Untergruppe ist: Wegen $f(e_G) = e_H$ ist $e_H \in \mathrm{Im}(f)$, damit gilt U1. Seien $c, d \in \mathrm{Im}(f)$, mit $c = f(a)$ und $d = f(b)$ für Elemente $a, b \in G$. Dann ist $f(a * b) = f(a) \circ f(b) = c \circ d$, und damit gibt es ein Element aus $G$ (nämlich $a * b$), welches von $f$ auf $c * d$ abgebildet wird, also ist $c * d \in \mathrm{Im}(f)$, es gilt also U2. Wegen $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ gibt es auch eine Element aus $G$, nämlich $a^{-1}$, welches auf $f(a)^{-1} = c^{-1}$ abgebildet wird, also ist auch $c^{-1} \in \mathrm{Im}(f)$, und damit gilt U3.
Dass $f$ surjektiv ist, genau dann wenn $\mathrm{Im}(f) = H$ gilt, ist exakt die Definition von Surjektivität, also haben wir dafür nichts zu beweisen. Interessanter ist die Charakterisierung von Injektivität. Zur Erinnerung: $f$ als Abbildung von $G$ nach $H$ ist injektiv, falls für alle $a, b \in G$ gilt: Wenn $f(a) = f(b)$ ist, dann ist auch $a = b$. Angenommen, dies würde gelten, $f$ wäre also injektiv. Wir wissen schon, dass $f(e_G) = e_H$ ist, also $\{e_G\} \subset \ker(f)$ und wir müssen $\{e_G\} \supset \ker(f)$ beweisen. Angenommen, es gäbe $a \neq e_G$, so dass $a \in \ker(f)$ ist. Dann hätten wir $f(a) = f(e_G) = e_H$, und $f$ wäre nicht injektiv. Es bleibt also, zu zeigen, dass aus $\{e_G\} \supset \ker(f)$ die Injektivität folgt. Hier sehen wir zum ersten Mal, dass die eigentlich so einfache Definition einer Gruppe, bzw. eines Gruppenhomomorphismus doch recht tiefsinnig und auch nützlich ist: Statt für alle Elemente aus $G$ prüfen zu müssen, dass keine zwei verschiedenen Elemente auf das gleiche Element aus $H$ abgebildet werden, reicht es, nur zu prüfen, dass keine zwei verschiedenen Elemente auf $e_H$ abgebildet werden: Dies nehmen wir nun an, es gelte also $\{e_G\} \supset \ker(f)$. Seien $a, b \in G$, und gelte $f(a) = f(b)$. Dann ist $f(b)^{-1} \circ f(a) = f(b)^{-1} \circ f(b) = e_H$, also folgt wegen $f(b^{-1}) = (f(b))^{-1}$ und der Homomorphismuseigenschaft, dass $f(b^{-1} * a) = e_H$ gilt. Damit ist $b^{-1} * a$ ein Element im Kern von $f$, und wegen der Voraussetzung $\{e_G\} \supset \ker(f)$ muss dann $b^{-1} * a = e_G$ gelten. Dann ist aber $b * b^{-1} * a = b * e_G$, also $a = b$, und damit ist $f$ injektiv. □

Zum Abschluss dieses Abschnitts wollen wir noch die oben betrachteten Beispiele $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4$ verallgemeinern. Sei $m$ eine natürliche Zahl größer Null. Dann können wir für jede ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$ den *Rest bei Division durch $m$* definieren, dies ist eine Zahl $r$ aus der Menge $\{0, 1, \ldots, m-1\}$, so dass gilt

$$n = q \cdot m + r$$

für irgendein $q \in \mathbb{Z}$. Man überlegt sich leicht, dass $r$ eindeutig bestimmt ist. Dann betrachten wir für jedes $r \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ die Menge

$$r + m\mathbb{Z} := \{r + m \cdot q | q \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z}$$

Dies sind genau die Zahlen $n \in \mathbb{Z}$, welche bei Division durch $m$ den Rest $r$ haben. Eine Menge $r + m\mathbb{Z}$ heißt Restklasse modulo $m$. Es ist also zum Beispiel für $m = 3$:

$$\begin{aligned} 0 + 3\mathbb{Z} &= \{\ldots, -3, 0, 3, 6, \ldots\} \\ 1 + 3\mathbb{Z} &= \{\ldots, -2, 1, 4, 7, \ldots\} \\ 2 + 3\mathbb{Z} &= \{\ldots, -1, 2, 6, 8, \ldots\} \end{aligned}$$

Es gilt dann (für allgemeines $m \in \mathbb{N}$)

$$\mathbb{Z} = (0 + m\mathbb{Z}) \cup (1 + m\mathbb{Z}) \cup (2 + m\mathbb{Z}) \cup \ldots \cup ((m-1) + m\mathbb{Z}),$$

und die Vereinigung dieser Mengen ist paarweise disjunkt (d.h., der Schnitt je zweier verschiedener dieser Menge ist die leere Menge). Wir wollen noch bemerken, dass dies genau die Zerlegung in Äquivalenzklassen bezüglich der folgenden Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ (siehe Definition 2.4) ist:

$$a \sim b \qquad \Longleftrightarrow \qquad a - b \text{ ist teilbar durch } m$$

Wie wir im letzten Abschnitt gesehen haben, kann man zu einer Äquivalenzrelation die Menge der Äquivalenzklassen betrachten, dies ist hier also eine endliche Menge mit $m$ Elementen. Wir bezeichnen diese Menge mit $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, oder auch mit $\mathbb{Z}_m$, d.h.,

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \{(0 + m\mathbb{Z}), (1 + m\mathbb{Z}), (2 + m\mathbb{Z}), \ldots, ((m-1) + m\mathbb{Z})\}$$

Wir haben weiter oben die Gruppen $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3$ und $\mathbb{Z}_4$ kennengelernt, die zugrundeliegenden Mengen können wir mit $\mathbb{Z}_m$ bzw. $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ für $m = 2, 3, 4$ identifizieren. Dies suggeriert, dass es auf $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ für alle $m$ eine Gruppenstruktur gibt. Dies ist tatsächlich der Fall: Zunächst bezeichnen wir für eine ganze Zahl $n$ die Restklasse modulo $m$, zu der $n$ gehört (also die Menge $r + m\mathbb{Z}$, so dass $r$ Rest bei Division von $n$ durch $m$ ist), mit $\overline{n}$. Dann definieren wir eine Verknüpfung auf $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ durch

$$\overline{a} + \overline{b} := \overline{a + b} \tag{3.2}$$

für alle Klassen $\overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Jetzt muss man sich überlegen, dass diese Definition auch wirklich sinnvoll ist: Wir wählen ja zur Berechnung von $\overline{a} + \overline{b}$ aus den Restklassen $\overline{a}$ bzw. $\overline{b}$ Elemente (nämlich $a$ bzw. $b$) aus. Wir könnten auch statt $a$ das Element $a+m$ oder $a+2m$ etc. bzw. statt $b$ das Element $b+m$, $b+2m$ etc. auswählen. Wenn das Ergebnis, also die Restklasse $\overline{a + b}$ von dieser Wahl abhängt, wenn also bei einer anderen Wahl ein anderes Ergebnis herauskommt, dann ist die Verknüpfung $\overline{a} + \overline{b}$ nicht *wohldefiniert*. Tatsächlich kann das aber hier nicht passieren: Seien $a' \in \overline{a}$ bzw. $b' \in \overline{b}$ andere Repräsentanten der Restklassen $\overline{a}$ bzw. $\overline{b}$, dann gilt $a' - a = km$ und $b' - b = lm$ für gewisse $k, l \in \mathbb{Z}$. Dann ist $a' + b' = a + b + (k + l)m$, also ist die Differenz $(a' + b') - (a + b)$ durch $m$ teilbar, und es gilt $\overline{a + b} = \overline{a' + b'}$. Damit erhalten wir folgenden Satz.

**Satz 3.8.** *Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann ist die Menge $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{m-1}\}$ zusammen mit der durch Formel (3.2) definierten Verknüpfung eine abelsche Gruppe. Die Abbildung*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & \overline{n} \end{array}$$

*ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus.*

*Beweis.* Die Axiome G1 (Assoziativität) und G4 (Kommutativität) gelten in $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$, weil sie in $\mathbb{Z}$ gelten und weil die Verknüpfung in $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ mit Hilfe der Verknüpfung in $\mathbb{Z}$ definiert ist. Als Beispiel rechnen wir das Axiom G1 nach, seien $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ gegeben, dann gilt

$$(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a + b} + \overline{c} = \overline{(a + b) + c} = \overline{a + (b + c)} = \overline{a} + \overline{b + c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$$

Das neutrale Element in $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ist die Restklasse $\overline{0} = 0 + m\mathbb{Z}$, und das inverse Element zu $\overline{n}$ ist die Restklasse $\overline{-n} = \overline{m - n} = (m - n) + m\mathbb{Z}$. □

Zum Abschluss sei noch erwähnt, dass Sie alle natürlich quasi täglich in $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ und in $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ rechnen, vielleicht ohne sich dessen bewusst zu sein: Man rechnet module 12, wenn man die Uhrzeit abliest (genauer, wenn man sich den Stundenzeiger anschaut: Wenn es 11 Uhr ist, dann ist es in 3 Stunden $\overline{11 + 3} = \overline{14} = 2$ Uhr), und man rechnet modulo 7, wenn man auf einen Kalender schaut (genauer, wenn man sich die Tage einer Woche anschaut: Wenn heute Samstag ist, also der 6. Tag der Woche, dann ist in 4 Tagen Mittwoch, also der $\overline{6 + 4} = \overline{10} = 3$. Tag der Woche).

## 3.2 Ringe und Körper

Wir haben im letzten Abschnitt Gruppen als eine Abstrahierung von verschiedenen natürlichen Verknüpfungen auf bekannten Mengen eingeführt: Addition auf $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$, Multiplikation auf z.B. $\mathbb{R}_{>0}$ usw. Immer handelte es sich aber um eine Menge mit einer einzigen Verknüpfung. Das ist natürlich schon bei den bekannten Zahlenbereichen $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$ zu wenig, denn auf diesen sind Addition *und* Multiplikation definiert. Wir brauchen also eine abstrakte Struktur, die zwei Verknüpfungen enthält, welche natürlich in vernünftiger Art und Weise miteinander interagieren sollen. Dies führt zu folgender Definition:

**Definition 3.9.** *Sei $R$ eine Menge, und seien $+$ und $\cdot$ zwei Verknüpfungen gemäß Definition 3.1 auf $R$, also Abbildungen*

$$\begin{aligned} + : R \times R &\longrightarrow R \\ \cdot : R \times R &\longrightarrow R \end{aligned}$$

*Dann heißt $(R, +, \cdot)$ (oder kürzer nur $R$, wenn die Verknüpfungen klar sind) ein Ring, falls die folgenden Axiome R1-R3 gelten:*

**R1** *Das Paar $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe (dies beinhaltet also schon die Axiome G1-G4 für die Verknüpfung $+$ auf $R$),*

**R2** *Die Verknüpfung $\cdot$ auf $R$ erfüllt das Assoziativgesetz, d.h., für alle $a, b, c \in R$ gilt: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$,*

**R3** *Die beiden Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ auf $R$ erfüllen die Distributivgesetze, d.h., für alle $a, b, c \in R$ gilt:*

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \qquad \text{und} \qquad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

*Gilt zusätzlich noch das Axiom*

**R4** *Die Verknüpfung $\cdot$ auf $R$ ist kommutativ, d.h., für alle $a, b \in R$ gilt $a \cdot b = b \cdot a$,*

*dann heißt $R$ ein kommutativer Ring. Ein Element $1$ aus $R$ heißt Einselement, falls für alle $a \in R$ gilt, dass $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ ist.*

Man beachte, dass das Symbol 1 völlig willkürlich gewählt ist, man könnte es auch $e$ nennen, aber es soll natürlich keine Verwechselung mit dem neutralen Element der Gruppe $(R, +)$ geben. Wir werden gleich sehen, dass in den klassischen Zahlenbereichen das Einselement tatsächlich die Zahl 1 ist, aber a priori ist es irgendein Element aus $R$, welches die Eigenschaft $1 \cdot a = a \cdot 1$ hat. Man beachte weiterhin, dass wir bei den Distributivgesetzen implizit vorausgesetzt haben, dass in Ausdrücken ohne Klammern die Verknüpfung $\cdot$ vor der Verknüpfung $+$ ausgeführt wird, der Ausdruck $a \cdot b + a \cdot c$ bedeutet also $(a \cdot b) + (a \cdot c)$.
Um mit der üblichen Sprachregelung konform zu sein, wollen wir die Verknüpfung $+$ meistens als *Addition*, und die Verknüpfung $\cdot$ meistens als *Multiplikation* bezeichnen (aber wie auch schon bei Gruppen sind dies nur Benennungen, die man auch anders wählen könnte). Wir wollen außerdem das neutrale Element bezüglich der Addition (also das neutrale Element der Gruppe $(R, +)$) mit 0 bezeichnen und das Nullelement nennen, hier gilt die gleiche Bemerkung wie oben bei einem Einselement in $R$. Dann erfüllen 0 und 1 die folgenden Eigenschaften.

**Lemma 3.10.** *Sei $R$ ein Ring. Falls es ein Einselement in $R$ gibt, dann ist es eindeutig bestimmt, und dann wollen wir es in Zukunft immer mit $1$ bezeichnen.*
*Für das Nullement $0 \in R$ gilt:*

$$0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$$

*für alle $a \in R$. Außerdem ist für alle $a, b \in R$:*

$$(-a) \cdot b = -(a \cdot b) = a \cdot (-b) \qquad \text{und} \qquad (-a) \cdot (-b) = a \cdot b,$$

*wobei für ein $x \in R$ das inverse Element zu $x$ bezüglich der Addition mit $-x$ bezeichnet wird.*

*Beweis.* Sei $1'$ ein weiteres Einselement, dann gilt $1 = 1 \cdot 1' = 1'$, die erste Gleichung gilt, weil $1'$ ein Einselement, die zweite Gleichung, weil 1 ein Einselement ist. Also haben wir $1 = 1'$, und damit ist ein Einselement in $R$, falls es existiert, eindeutig.
Für das Nullelement gilt:

$$0 \cdot a = (0 + 0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a$$

für alle $a \in R$ und aus der Gleichheit $0 \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a$ folgt wegen der Kürzungsregel (Lemma 3.3, 4.) in der Gruppe $(R, +)$, dass $0 \cdot a = 0$ ist. Analog beweist man, dass auch $a \cdot 0 = 0$ gilt (auch falls R4 nicht gilt, d.h., falls der Ring $R$ nicht kommutativ ist).

Seien nun $a, b \in R$ dann ist

$$a \cdot b + (-a) \cdot b \overset{R3}{=} (a + (-a)) \cdot b = 0 \cdot b = 0,$$

und damit ist $(-a) \cdot b$ das Inverse bezüglich $+$ von $a \cdot b$, also gilt $-(a \cdot b) = (-a) \cdot b$. Analog zeigt man $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$. Schließlich folgt aus dem eben Bewiesenen, dass

$$(-a) \cdot (-b) = -((-a)b)) = -(-(a \cdot b)) = a \cdot b$$

hierbei folgt die letzte Gleichung aus Lemma 3.3, 3. (man beachte, dass dieses Lemma für irgendeine abstrakte Gruppe $(G, \cdot)$ formuliert war, daher wurde dort die Verknüpfung multiplikativ geschrieben, aber wir wenden das Lemma jetzt auf die Gruppe $(R, +)$ an). □

Wir diskutieren jetzt einige Beispiele für Ringe:

1. Die bekannten und schon mehrfach erwähnten Zahlbereiche $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ sind Ringe, alle kommutativ und mit Eins (und das Einselement ist, wie oben schon kurz erwähnt, tatsächlich die Zahl 1, genauso ist das Nullelement die Zahl 0).

2. Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ zusammen mit $+$ und $\cdot$ ist hingegen kein Ring, weil auch $(\mathbb{N}, +)$ keine Gruppe ist.

3. Die Menge $R = \{e\}$, welche nur aus einem Element besteht, ist ein Ring, wobei Addition und Multiplikation durch $e + e = e$ und $e \cdot e = e$ erklärt sind. Dann ist das Element $e$ sowohl Null, also auch Einselement, d.h., es handelt sich sogar um einen kommutativen Ring mit Eins. Es handelt sich hierbei allerdings um ein etwas pathologisches Beispiel: man kann nämlich leicht zeigen, dass für jeden Ring mit mehr als einem Element notwendigerweise $1 \neq 0$ gelten muss.

4. Das nächste Beispiel ist in der Analysis relevant: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, dann betrachten wir die Menge

   $$R := \{f : I \to \mathbb{R}\}$$

   aller Funktionen auf $I$ mit Werten in $\mathbb{R}$. Dies ist ein Ring (kommutativ, mit Eins) bezüglich der Verknüpfungen

   $$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \qquad \text{und} \qquad (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$$

   Die konstanten Funktionen $0 : I \to \mathbb{R}, x \mapsto 0$ und $1 : I \to \mathbb{R}, x \mapsto 1$ sind das Null- bzw das Einelement, und die anderen Axiome folgen einfach daraus, dass sie in $\mathbb{R}$ gelten.

5. Die im letzten Abschnitt eingeführten abelschen Gruppen $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$ lassen sich durch die Multiplikation modulo $m$ zu einem Ring erweitern, wir definieren die Verknüpfung $\cdot$ analog zur Addition durch:

   $$\overline{a} \cdot \overline{b} := \overline{a \cdot b}$$

   Auch hier sieht man, dass diese Verknüpfung wohldefiniert ist, denn falls $\overline{a'} = \overline{a}$ und $\overline{b'} = \overline{b}$ ist, dann gilt $a' = a + km$ und $b' = b + lm$ für zwei ganzen Zahlen $k, l$, und daher ist $a' \cdot b' = ab + m \cdot (al + kb + klm)$, also $\overline{a \cdot b} = \overline{a' \cdot b'}$.

   Da die Mengen $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ endlich sind, kann man für ein festes $m$ die Multiplikation auf $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ natürlich auch durch Verknüpfungstabellen angeben, so, wie wir das für die Addition für $m = 2, 3, 4$ im letzten Abschnitt gemacht haben. Hier sind die entsprechenden Tabellen für die Multiplikation (wir schreiben zur Vereinfachung $a$ statt $\overline{a}$ in diesen Tabellen, aber alle Elemente sind als Restklassen zu lesen):

   $\mathbb{Z}_2$ :

   | $\cdot$ | 0 | 1 |
   |---|---|---|
   | 0 | 0 | 0 |
   | 1 | 0 | 1 |

   $\mathbb{Z}_3$ :

   | $\cdot$ | 0 | 1 | 2 |
   |---|---|---|---|
   | 0 | 0 | 0 | 0 |
   | 1 | 0 | 1 | 2 |
   | 2 | 0 | 2 | 1 |

   $\mathbb{Z}_4$ :

   | $\cdot$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
   |---|---|---|---|---|
   | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
   | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
   | 2 | 0 | 2 | 0 | 2 |
   | 3 | 0 | 3 | 2 | 1 |

Wir beobachten hier ein interessantes Phänomen: Wenn wir in diesen drei Fällen die Menge $R\backslash\{0\}$ betrachten (d.h., wenn wir die erste Zeile und die erste Spalte dieser Tabellen weglassen), dann sind $(\mathbb{Z}_2\backslash\{0\},\cdot)$ und $(\mathbb{Z}_3\backslash\{0\},\cdot)$ wieder Gruppen, aber nicht $(\mathbb{Z}_4\backslash\{0\},\cdot)$, denn in letzterer gilt $2\cdot 2 = 0$, d.h., die Multiplikation definiert keine Verknüpfung auf $\mathbb{Z}_4\backslash\{0\}$, denn das Produkt von 2 Elementen (nämlich von 2 mit sich selbst) liegt nicht mehr in dieser Menge.

Diese letzten Beispiele führen zu einer der wichtigsten Definitionen der Algebra.

**Definition 3.11.** *Ein Körper ist eine Menge $K$ zusammen mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$, welche folgende Axiome erfüllen:*

**K1** *$(K,+)$ ist eine abelsche Gruppe, deren neutrales Element $0$ geschrieben und als Nullelement bezeichnet wird. Das inverse Element bezüglich $+$ von $a\in K$ schreibt man $-a$.*

**K2** *$(K\backslash\{0\},\cdot)$ ist ebenfalls eine abelsche Gruppe, deren neutrales Element wir Einselement nennen und $1$ schreiben (insbesondere folgt daraus schon, dass in einem Körper immer $1\neq 0$ ist). Hier schreiben wir das inverse Element bezüglich $\cdot$ von $a\in K\backslash\{0\}$ als $a^{-1}$.*

**K3** *Es gilt das Distributivgesetz: $\forall a,b,c\in K: a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$ (da sowohl $+$ als auch $\cdot$ kommutativ sind, reicht es, ein Distributivgesetz zu verlangen).*

Wie man durch Vergleich der Definitionen sofort feststellt, ist jeder Körper ein Ring, genauer ein kommutativer Ring mit Eins, und ein kommutativer Ring $R$ mit Eins ist genau dann ein Körper, wenn zusätzlich zu den Ringaxiomen noch gilt, dass jedes Element in $R\backslash\{0\}$ ein Inverses bezüglich der Multiplikation hat. Damit können wir sofort einige Beispiele von Körpern besprechen:

1. Wie wir oben schon gesehen haben, sind die Ringe $(\mathbb{Z}_2,+,\cdot)$ und $(\mathbb{Z}_3,+,\cdot)$ Körper.
2. Die Zahlenbereiche $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind mit der üblichen Addition und Multiplikation Körper, nicht aber $(\mathbb{Z},+,\cdot)$, denn außer den Elementen $1$ und $-1$ hat keine ganze Zahl ein multiplikatives Inverses (in $\mathbb{Z}$).
3. Wir werden weiter unten die *komplexen Zahlen* $\mathbb{C}$ als Erweiterung des Körpers der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ etwas ausführlicher diskutieren. Als Menge gilt $\mathbb{C} := \mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Wie schon bei Gruppen und Ringen können wir auch bei Körpern gewisse Rechenregeln direkt aus den Axiomen ableiten.

**Lemma 3.12.** *Sei $(K,+,\cdot)$ ein Körper.*

1. *$\forall a,b\in K$: Aus $a\cdot b = 0$ folgt, dass $a = 0$ oder $b = 0$ ist (damit ist natürlich auch der Fall $a = b = 0$ umfasst, will man dies nicht, müsste man „entweder oder“ schreiben),*
2. *$\forall x,\tilde{x}\in K, a\in K\backslash\{0\}: x\cdot a = \tilde{x}\cdot a \Longrightarrow x = \tilde{x}$.*

*Beweis.* 1. Dies folgt direkt aus dem Axiom K2: Angenommen, es gäbe $a,b\in K$ mit $a\cdot b = 0$ und $a\neq 0$, $b\neq 0$. Dann hätten wir $a,b\in K\backslash\{0\}$ aber $a\cdot b = 0$, d.h., dann würde $\cdot$ gar keine Verknüpfung auf $K\backslash\{0\}$ definieren, denn das Produkt von $a$ und $b$ ist nicht mehr in $K\backslash\{0\}$ enthalten.

2. Falls eines der Elemente $x$ oder $\tilde{x}$ gleich Null ist, dann folgt $\tilde{x}\cdot a = 0$ (falls $x = 0$ ist) bzw. $x\cdot a = 0$ (falls $\tilde{x} = 0$ ist). Dann folgt aber aus dem ersten Teil dieses Lemmas, dass $\tilde{x} = 0$ bzw $x = 0$ gilt, und dann ist offensichtlich $x = \tilde{x}$. Damit ist klar, dass wir die Aussage nur noch für den Fall $x,\tilde{x}\in K\backslash\{0\}$ beweisen müssen, und da ist sie klar, denn sie ist genau die Kürzugsregel (Lemma 3.3, 4.) in der Gruppe $(K\backslash\{0\},\cdot)$.

□

Wir können weitere Beispiele von Körpern durch Betrachtung der Restklassenringe $\mathbb{Z}_m$ konstruieren. Wir haben schon gesehen, dass $\mathbb{Z}_2$ und $\mathbb{Z}_3$ Körper sind, nicht aber $\mathbb{Z}_4$. Das folgende Lemma beantwortet die Frage, welche Ringe $\mathbb{Z}_m$ Körper sind, vollständig.

**Lemma 3.13.** *Der Ring $\mathbb{Z}_m$ ist ein Körper genau dann, wenn $m$ eine Primzahl ist.*

*Beweis.* Wir haben zwei Implikationen zu beweisen: Zuerst zeigen wir die folgende Richtung: Falls $\mathbb{Z}_m$ ein Körper ist, dann muss $m$ notwendigerweise eine Primzahl sein. Dazu äquivalent ist die Kontraposition dieser Aussage (siehe Proposition 2.19): Falls $m$ keine Primzahl ist, dann kann $\mathbb{Z}_m$ auch kein Körper sein. Das Argument dafür haben wir weiter oben schon benutzt: Ist $m$ keine Primzahl, dann existiert eine echte Zerlegung $m = a \cdot b$, wobei echt bedeutet, dass $1 < a < m$ und auch $1 < b < m$ gilt (jede Zahl, auch eine Primzahl $p$, kann man natürlich immer als $p = 1 \cdot p$ schreiben). Dann betrachten wir die Elemente $\overline{a}$ und $\overline{b}$ in $\mathbb{Z}_m$. Offensichtlich gilt $\overline{a} \neq \overline{0}$ und $\overline{b} \neq \overline{0}$ (da weder $a = a - 0$ noch $b = b - 0$ durch $m$ teilbar sind). Andererseits ist $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a \cdot b} = \overline{m} = \overline{0}$. Damit haben wir wieder die Situation, dass die Multiplikation keine Verknüpfung auf $\mathbb{Z}_m \backslash \{0\}$ definiert, und dann kann $\mathbb{Z}_m$ kein Körper sein.
Nun beweisen wir die andere Implikation, d.h., wir haben die folgende Aussage zu zeigen: Falls $m$ eine Primzahl ist, dann muss $\mathbb{Z}_m$ ein Körper sein. Zuerst müssen wir zeigen, dass der eben beobachtete Effekt nicht eintreten kann, falls $m$ eine Primzahl ist. Genauer zeigen wir die folgende Hilfsaussage: Für alle $\overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{Z}_m$ gilt:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{0} \Rightarrow \overline{a} = \overline{0} \qquad \text{oder} \qquad \overline{b} = \overline{0}$$

Aus $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{0}$ folgt, dass es ein $c \in \mathbb{Z}$ mit $a \cdot b = c \cdot m$ gibt. Da nun nach Voraussetzung $m$ eine Primzahl ist, *muss* $a$ oder $b$ durch $m$ teilbar sein (wenn $m$ keine Primzahl ist, könnten sich die verschiedenen Primfaktoren auf $a$ und $b$ aufteilen). Dann ist aber $\overline{a} = \overline{0}$ oder $\overline{b} = \overline{0}$. Damit haben wir die Hilfsaussage bewiesen. Ringe, welche diese Aussage erfüllen, heißen *nullteilerfrei* (zum Beispiel ist $\mathbb{Z}$ nullteilerfrei, ohne ein Körper zu sein).
Nun zeigen wir das Axiom K2 (zur Erinnerung: ein kommutativer Ring mit Eins, welcher K2 erfüllt, ist ein Körper). Sei $\overline{a} \in \mathbb{Z}_m \backslash \{0\}$ gegeben. Wir müssen zeigen, dass $\overline{a}$ ein Inverses bezüglich der Multiplikation in $\mathbb{Z}_m$ hat. Dazu betrachten wir die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_m & \longrightarrow & \mathbb{Z}_m \\ \overline{x} & \longmapsto & \overline{a \cdot x} \end{array}$$

Diese Abbildung ist ein Gruppenhomomorphismus $(\mathbb{Z}_m, +) \to (\mathbb{Z}_m, +)$, denn $\overline{a \cdot (x + y)} = \overline{ax} + \overline{ay}$. Ausserdem gilt: Falls $\overline{ax} = \overline{a} \cdot \overline{x} = \overline{0}$, dann muss $\overline{x} = 0$ sein, weil, wie eben bewiesen, $\mathbb{Z}_m$ nullteilerfrei ist (und weil $\overline{a} \neq \overline{0}$ nach Voraussetzung gilt). Wegen der letzten Aussage von Lemma 3.7 ist diese Abbildung dann ein injektiver Gruppenhomomorphismus. Weil es sich aber um eine Abbildung von einer Menge in sich selbst handelt, und weil diese Menge endlich viele Elemente enthält, muss die Abbildung dann notwendigerweise auch surjektiv sein. Das aber heißt, dass das Element $\overline{1} \in \mathbb{Z}_m$ ein Urbild besitzt, d.h., es gibt ein $\overline{b} \in \mathbb{Z}_m$, so dass $\overline{a \cdot b} = \overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{1}$ ist, und dann ist $\overline{b} = \overline{a}^{-1}$. Damit gilt das Axiom K2, und $\mathbb{Z}_m$ ist ein Körper. □

**Bemerkung:** Durch das letzte Lemma erhalten wir eine Menge von Beispielen für Körper, mit dem enormen Vorteil, dass diese endlich sind. Man sollte sich klar machen, was dies praktisch bedeutet: Man kann in solchen Körpern rechnen wie üblich (d.h., man hat Verknüpfungen + und ·, die sich „weitgehend“ wie in den bekannten Zahlbereichen verhalten), aber wegen der Endlichkeit der zugrundeliegenden Mengen kann man diese Rechenoperationen wirklich in Computern implementieren. Dies steht im Gegensatz zum Rechnen in $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$, da natürlich wegen der Unendlichkeit dieser Zahlbereiche kein Computer wirklich in diesen rechnen kann. Tatsächlich sind endliche Körper in Anwendungen wie Codierungstheorie oder Kryptologie enorm wichtig.
In der Algebra wird bewiesen, dass es außer $\mathbb{Z}_p$ für eine Primzahl $p$ auch noch andere endliche Körper gibt, nämlich solche, welche $p^n$ Elemente haben, wobei $p$ wieder eine Primzahl ist (aber $p^n$ für $n > 1$ natürlich nicht). Außerdem kann man beweisen, dass dies auch alle sind, andere endliche Körper gibt es also nicht. Es gibt also Körper mit 2, 3, 4, 5, etc., aber zum Beispiel nicht mit 6 Elementen. Man bezeichnet einen Körper mit $p^n$ Elementen auch als $\mathbb{F}_{p^n}$, und jetzt sehen wir, woher die Bezeichnung der Gruppe $(\mathbb{F}_4, +)$ im letzten Kapitel kam: Dies ist eine additive Gruppenstruktur auf der Menge $\{0, 1, 2, 3\}$, so dass es eine Multiplikation auf $\{1, 2, 3\}$ gibt, welche zusammen mit der Addition die Körperaxiome erfüllt. Hier sind der Vollständigkeit

halber die beiden Verknüpfungstafeln des Körpers $\mathbb{F}_4$:

| $+$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 1 | 0 | 3 | 2 |
| 2 | 2 | 3 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 2 | 1 | 0 |

| $\cdot$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 0 | 2 | 3 | 1 |
| 3 | 0 | 3 | 1 | 2 |

Als Übung prüfen Sie bitte die Körperaxiome an $(\mathbb{F}_4, +, \cdot)$ nach.

**Die komplexen Zahlen:** Wir oben schon angekündigt, sind die komplexen Zahlen ein weiteres wichtiges Beispiel für einen Körper mit unendlich vielen Elementen, und wir werden später in dieser Vorlesung (nämlich im Kapitel **??** über Eigenwerte und Normalformen von Endomorphismen explizit Eigenschaften von $\mathbb{C}$ benutzen). Daher wollen wir die Konstruktion von $\mathbb{C}$ *aufbauend auf den reellen Zahlen* hier vorstellen. Wie schon im letzten Kapitel erwähnt, werden die reellen Zahlen in der Analysis konstruiert, und deshalb hier als bekannt vorausgesetzt (damit ist natürlich gemeint, dass wir davon ausgehen, dass Sie mit den reellen Zahlen rechnen können. Sie müssen die abstrakte Konstruktion von $\mathbb{R}$ aus der Analysis nicht kennen, um jetzt die Konstruktion von $\mathbb{C}$ verstehen zu können).
Warum wollen wir den Körper der komplexen Zahlen konstruieren? Die bisher bekannten Zahlenbereiche $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ bauen aufeinander auf, und jedes Mal gibt es Gleichungen die man in einem Bereich formulieren kann, die man in diesem nicht lösen kann, im nächstgrößeren Zahlenbereich aber schon. Solch ein Problem haben wir aber auch noch im Zahlenbereich $\mathbb{R}$: Wir können die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ in $\mathbb{R}$ nicht lösen, denn das Quadrat einer reellen Zahl $x$ ist nicht negativ, kann also nicht gleich $-1$ sein, wie es sein müsste, wenn $x$ Lösung von $x^2 + 1 = 0$ sein sollte. Wie erhalten wir nun eine Erweiterung des Körpers $\mathbb{R}$, also einen Körper $K$, welcher $\mathbb{R}$ als Teilmenge enthält, und dessen Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ die Addition und Multiplikation auf $\mathbb{R}$ fortsetzt ? Eine einfach Möglichkeit, die Menge $\mathbb{R}$ zu vergrößern, ist es, das kartesische Produkt $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zu betrachten. Wir haben dann die injektive Abbildung $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, x \mapsto (x, 0)$, und wir können versuchen, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zu einem Körper zu machen, dessen Verknüpfungen die Addition und Multiplikation aus $\mathbb{R}$ fortsetzen
Hierzu beweisen wir zunächst ein ganz einfaches Lemma, welches eine auch in anderen Zusammenhängen nützliche Aussage liefert.

**Lemma 3.14.** *Sei $R$ eine Gruppe (bezüglich der Verknüpfung $*$) bzw. ein Ring (bezüglich der Verknüpfungen $+$ und $\cdot$). Betrachte das kartesische Produkt $R^n := \underbrace{R \times \ldots \times R}_{n-mal}$. Dann ist auch $R^n$ in natürlich Art und Weise eine Gruppe bzw. ein Ring. Ist $(R, *)$ eine abelsche Gruppe, so auch $R^n$, und ist $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Eins, so auch $R^n$.*

*Beweis.* Wir müssen erklären, wie man auf $R^n$ eine Verknüpfung $*$ (im Fall, das $(R, *)$ eine Gruppe ist) bzw. Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ (im Fall, dass $(R, +, \cdot)$ ein Ring) ist, definiert, so dass die Gruppen- bzw. die Ringaxiome erfüllt sind. Dies geht ganz einfach, man verwendet die gegebenen Verknüpfungen $*$ bzw. $+$ und $\cdot$ einfach *komponentenweise*, d.h., man definiert für $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in R^n$

$$
\begin{array}{rcll}
(a_1, \ldots, a_n) * (b_1, \ldots, b_n) & := & (a_1 * b_1, \ldots, a_n * b_n) & \text{falls } (R, *) \text{ Gruppe ist,} \\
 & & & \\
(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) & := & (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) & \text{falls } (R, +, \cdot) \text{ Ring ist,} \\
(a_1, \ldots, a_n) \cdot (b_1, \ldots, b_n) & := & (a_1 \cdot b_1, \ldots, a_n \cdot b_n) & \text{falls } (R, +, \cdot) \text{ Ring ist,}
\end{array}
$$

Da hier in allen Komponenten das gleiche passiert, nämlich genau die Verknüpfung(en) in $R$, ist klar, dass sich die Eigenschaften der Verknüpfung(en) aus $R$ auf $R^n$ vererben, d.h., dass $R^n$ eine Gruppe (gegebenenfalls abelsch) bzw. ein Ring (gegebenenfalls kommutativ mit Eins) ist. □

Es fällt auf, dass wir das Lemma nur für Gruppen und Ringe, aber nicht für Körper formuliert haben. Das hat einen einfachen Grund: Es stimmt für Körper nicht, dies kann man schon im Fall $n = 2$ sehen: Wenn $K$ ein

Körper ist, und wir auf $K \times K$ die komponentenweise Addition und Multiplikation wie im Lemma betrachten, dann erhalten wir natürlich einen kommutativen Ring mit Eins, aber es gilt dann $(1,0) \cdot (0,1) = (0,0)$, also ist $K \times K$ nicht nullteilerfrei, und damit auch kein Körper.
Wenn wir also wie oben angedeutet eine Körperstruktur auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ finden wollen, müssen wir uns zumindest für die Multiplikation etwas Schlaueres ausdenken. Tatsächlich hat die Mathematik mehrere Jahrhunderte gebraucht, um die richtige Lösung zu finden, welche uns heute ganz natürlich erscheint.

**Definition-Lemma 3.15.** *Die komplexen Zahlen* $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *sind mit folgenden Verknüpfungen ein Körper:*

$$\begin{array}{rcl} (a,b) + (c,d) & := & (a+c, b+d) \\ (a,b) \cdot (c,d) & := & (ac - bd, ad + bc) \end{array} \tag{3.3}$$

*Das Nullelement von* $\mathbb{C}$ *ist* $(0,0)$*, das Einselement* $(1,0)$ *Die Abbildung* $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}, x \mapsto (x,0)$ *bettet den Körper* $\mathbb{R}$ *in* $\mathbb{C}$ *ein, und wir schreiben für eine komplexe Zahl* $(r,0)$*, die also im Bild dieser Abbildung liegt, auch einfach* $r$*, und dann sind die Verknüpfungen oben auf den reellen Zahlen genau die übliche Addition und Multiplikation. Das Element* $(0,1)$ *heißt imaginäre Einheit und wird* $i$ *geschrieben.*

*Beweis.* Wir beweisen hier nur das Axiom K2, alle anderen sind elementare Übungsaufgaben. Sei also eine komplexe Zahl $(a,b)$ gegeben, welche nicht das Nullelement ist, d.h. $(a,b) \neq (0,0)$. Dann ist das Element

$$\left( \frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right)$$

ein Inverses zu $(a,b)$ bezüglich der eben definierten Multiplikation, denn

$$(a,b) \cdot \left( \frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right) = \left( \frac{a^2 - b \cdot (-b)}{a^2+b^2}, \frac{a \cdot (-b) + b \cdot a}{a^2+b^2} \right) = (1,0)$$

□

Man beachte, dass in $\mathbb{C}$ gilt $(0,1) \cdot (0,1) = (0-1, 0+0) = (-1,0) = -1$. Also erfüllt die imaginäre Einheit die Gleichung $x^2 = -1$ oder $x^2 + 1 = 0$. Wir haben damit das oben gestellte Ziel erreicht: $\mathbb{C}$ ist ein Körper, welcher $\mathbb{R}$ enthält und zwar so, dass die Addition und Multiplikation in $\mathbb{C}$ die aus $\mathbb{R}$ fortsetzt, und es gibt eine Lösung für $x^2 + 1 = 0$ in $\mathbb{C}$. Man sieht leicht, dass es sogar 2 Lösungen gibt: Die Zahl $-i = (-1,0)$ ist auch eine Lösung von $x^2 + 1 = 0$. Tatsächlich gilt noch viel mehr, nämlich der sogenannte *Fundamentalsatz der Algebra*, welcher folgendes besagt:

**Satz 3.16** (Fundamentalsatz der Algebra, 1. Version)**.** *Jede Gleichung der Form*

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 = 0,$$

*wobei* $n \in \mathbb{N}$ *ist,* $a_n, \ldots, a_0$ *fest vorgegebene Zahlen aus* $\mathbb{C}$ *sind (also zum Beispiel auch aus* $\mathbb{R}$*), und wobei* $x$ *eine Unbekannte ist, hat in* $\mathbb{C}$ *mindestens eine, und höchstens* $n$ *Lösungen.*

Es gibt sehr viele Beweise für diesen Satz, aber kurioserweise kann es trotz seines Namens keinen Beweis geben, welcher nur algebraische Methoden und keine Analysis verwendet, ganz einfach deshalb, weil der Körper $\mathbb{C}$ aufbauend auf dem Körper $\mathbb{R}$ definiert ist, und zur Konstruktion von $\mathbb{R}$ benötigt man Analysis. Je nachdem, welche Vorlesungen (und bei welchem Vortragenden) sie hören werden, wird ein Beweis dieses Satzes zum Beispiel in der Vorlesung Funktionentheorie, oder in der Vorlesung Algebra oder in einer anderen Veranstaltung vorkommen.
Man kann mit den komplexen Zahlen leichter rechnen, wenn man bedenkt, dass für alle $(a,b) \in \mathbb{C}$ gilt

$$(a,b) = (a,0) \cdot (1,0) + (b,0) \cdot (0,1)$$

Da $(a,0)$ und $(b,0)$ reelle Zahlen sind, da $(1,0)$ das Einselement in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ ist und da $(0,1)$ die imaginäre Einheit ist, können wir unter Berücksichtigung der oben eingeführten Konventionen also auch schreiben

$(a, b) = a + b \cdot i$. Mit dieser Schreibweise lassen sich die Addition und die Multiplikation (also Formel (3.3)) so umschreiben

$$\begin{array}{rcl} (a+bi)+(c+di) & = & (a+c)+(b+d)i \\ (a+bi)\cdot(c+di) & = & (ac-db)+(ad+bc)i \end{array} \tag{3.4}$$

d.h., wenn man nur mit den reellen Zahlen rechnen kann, und weiss, dass $i^2 = -1$ ist, dann kann man auch schon mit den komplexen Zahlen rechnen. An dieser Stelle führen wir noch zwei Begriffe ein: Für eine komplexe Zahl $z = a + bi$ heißt $a$ der Realteil von $z$, geschrieben $a = \mathrm{Re}(z)$ und $b$ der Imaginärteil von $z$, geschrieben $b = \mathrm{Im}(z)$. Man beachte, dass Real- und Imaginärteil von $z$ reelle Zahlen sind.
Da $\mathbb{C}$ als Menge (und sogar als abelsche Gruppe $(\mathbb{C}, +)$) ja einfach gleich $\mathbb{R}^2$ ist, können wir uns eine komplexe Zahl natürlich einfach als Punkt in der Zahlenebene vorstellen.

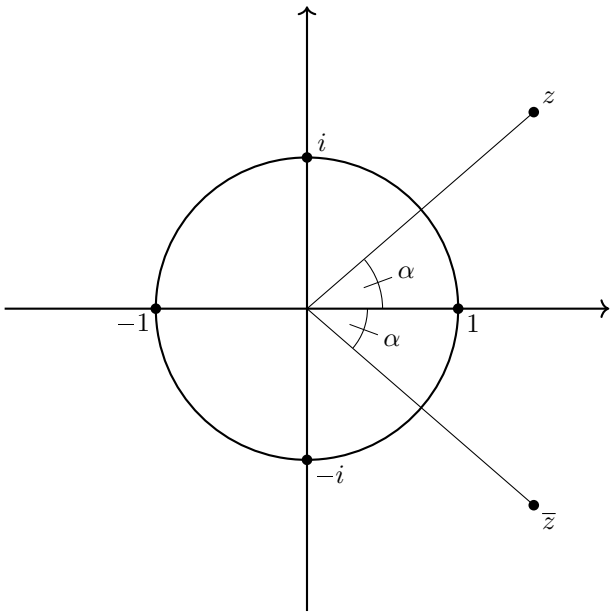



Abbildung 3.1: Komplexe Zahlen in der Ebene.

Man nennt diese auch *Gaußsche Zahlenebene*.
Dies liefert uns zwei wichtige Zusatzinformationen: Erstens erhalten wir eine weitere Darstellung einer komplexen Zahl, nämlich die sogenannten Polarkoordinaten: Zunächst definieren wir für eine komplexe Zahl $z = a + bi$ ihren Betrag, geschrieben $|z|$ durch

$$|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$$

Klar ist, dass dann $|z|$ immer eine nicht-negative reelle Zahl ist. Klar ist auch, dass diese Definition mit der Definition des Betrages einer reellen Zahl übereinstimmt, d.h., falls $z \in \mathbb{R}$ ist, also $z = a$ und $b = 0$, dann ist $|z| = \sqrt{a^2} = |a|$.
Im obigen Bild ist noch die Zahl $\overline{z} := a - b \cdot i$ eingezeichnet. Diese heißt zu $z$ *konjugiert komplexe* Zahl. Es gilt offensichtlich

$$z \cdot \overline{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$$

Man rechnet leicht nach, dass die folgenden Rechenregeln bezüglich der komplexen Konjugation (also der Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \overline{z}$ gelten:

$$\begin{array}{rcl} \overline{z_1 + z_2} & = & \overline{z_1} + \overline{z_2} \\ \overline{z_1 \cdot z_2} & = & \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \\ z = \overline{z} & \iff & z \in \mathbb{R} \end{array}$$

Wir wollen nun noch eine zweite Darstellung der komplexen Zahlen besprechen, in der die Multiplikation leichter zu berechnen ist.

**Definition 3.17.** *Das Paar* $(|z|, \alpha) \in \mathbb{R}_{\geqslant 0} \times [0, 2\pi)$ *heißt Polarkoordinaten der komplexen Zahl* $z = a + bi$*, falls* $a = |z| \cdot \cos(\alpha)$ *und* $b = |z| \cdot \sin(\alpha)$ *ist. Dann ist notwendigerweise* $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$*, und heißt der Betrag von* $z$*, der Winkel* $\alpha \in [0, 2\pi)$ *heißt das Argument von* $z$ *und wird auch als* $\arg(z)$ *geschrieben.*

Man kann also die komplexe Zahl $z$ als

$$z = |z| \cdot (\cos(\alpha) + \sin(\alpha) \cdot i)$$

schreiben. Die zu $z$ konjugiert komplexe Zahl $\overline{z}$ hat den gleichen Betrag als $z$ und schreibt sich als

$$z = |z| \cdot (\cos(\alpha) - \sin(\alpha) \cdot i) = |z| \cdot (\cos(2\pi - \alpha) + \sin(2\pi - \alpha) \cdot i)$$

wegen $\cos(2\pi - \alpha) = cos(\alpha)$ und $\sin(2\pi - \alpha) = -\sin(\alpha)$.
Wie man aus der Definition der Verknüpfungen auf $\mathbb{C}$ (Formeln (3.3) und (3.4)) sieht, ist die Addition geometrisch ganz leicht in der Gaußschen Zahlenebene zu erklären: sie entspricht der Vektoraddition in $\mathbb{R}^2$. Die Multiplikation läßt sich ebenso einfach mit Hilfe der Polarkoordinaten verstehen, sind nämlich $z = |z| \cdot (\cos(\alpha) + \sin(\alpha) \cdot i)$ und $w = |w| \cdot (\cos(\beta) + \sin(\beta) \cdot i)$, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} z \cdot w &= |z| \cdot |w| \cdot (\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) + i \cdot (\cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta))) \\ &= |z| \cdot |w| \cdot (\cos(\alpha + \beta) + i \cdot \sin(\alpha + \beta)) \end{aligned}$$

Also gilt für die Multiplikation komplexer Zahlen die Regel: Die Beträge werden multipliziert, die Argumente werden modulo $2\pi$ addiert (d.h., man bestimmt den Winkel $\gamma \in [0, 2\pi)$, so dass gilt $\alpha + \beta = k \cdot 2\pi + \gamma$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$). Man sieht aus der Formel für die Multiplikation in Polarkoordinaten, dass die Menge

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\} \subset \mathbb{C}$$

invariant unter der Multiplikation ist, d.h., falls $z_1, z_2 \in S^1$ sind, dann ist auch $z_1 \cdot z_2 \in S^1$. Außerdem gilt für $z = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha) \in S^1$, dass $z^{-1} = \overline{z} = \cos(2\pi - \alpha) + i\sin(2\pi - \alpha)$ ist, eben weil $1 = |z|$, also $1 = |z|^2 = z \cdot \overline{z}$ gilt. Damit ist auch $z^{-1} \in S^1$, und (weil natürlich auch $1 \in S^1$ gilt) haben folgende Aussage bewiesen.

**Proposition 3.18.** *Die Menge* $S^1$ *ist bezüglich der Multiplikation eine Gruppe, genauer, eine Untergruppe von* $(\mathbb{C}\backslash\{0\}, \cdot)$.

Man bemerke, dass die 4 Zahlen $1, i, -1, -i$ alle in $S^1$ liegen, und ihrerseites eine Untergruppe von $(S^1, \cdot)$ bilden. Man überlege sich zur Übung, dass diese Untergruppe isomorph zur Gruppe $(\mathbb{Z}_4, +)$ ist, d.h. es gibt einen Gruppenisomorphismus $(\{1, i, 1, -i\}, \cdot) \to (\mathbb{Z}_4, +)$.

## 3.3 Polynome

Wir haben weiter oben schon den Fundamentalsatz der Algebra (ohne Beweis) behandelt, dieser hängt eng mit Polynomen und ihren Nullstellen zusammen. Dies ist eigentlich ein zentrales Thema der Algebra-Vorlesung, welche Sie eventuell später im Studium hören, aber für gewisse Aspekte der linearen Algebra (insbesondere die Theorie der Eigenwerte, siehe Kapitel **??**) und auch sonst in vielen Bereichen der Mathematik sind Polynome sehr wichtig, daher wollen wir hier einiges dazu erzählen.
Was ist ein Polynom: Man startet mit dem Begriff des *Monoms* (in deutsch Term): Dies ist einfach eine Potenz einer Zahl oder eher einer Unbekannten, also 1, $x$, $x^2$, $x^3$, usw. Ein Polynom ist dann ein „Vielterm“, es besteht also aus vielen Monomen. Wir wollen dies etwas präzisieren, allerdings geben wir keine ganz formale Definition, weil dies wieder mehr Aufwand bedeutet (und Zeit kostet). Auch hier sei auf eine Algebra-Vorlesung oder ein Algebra-Buch verwiesen. Sei $K$ ein Körper, und $x$ eine Unbekannte. Das bedeutet, dass $x$ ein Buchstabe ist, für den wir bei Bedarf etwas einsetzen können, so dass der dann entstehende Ausdruck Sinn macht und man damit rechnen kann.

**Definition 3.19.** *Ein Polynom in $x$ mit Koeffizienten in $K$ ist ein formaler Ausdruck der Form*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

*wobei die $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ feste Elemente des Körpers $K$ sind und die Koeffizienten von $f(x)$ heißen. Wir schreiben manchmal auch nur $f$ statt $f(x)$ für ein Polynom, wenn klar ist, wie die Unbekannte heißt. Sei weiterhin $K[x]$ die Menge aller Polynome in $x$ mit Koeffizienten aus $K$. Falls bei einem $f \in K[x]$ alle Koeffizienten $a_i$ gleich 0 sind, dann heißt $f$ das Nullpolynom, und wir schreiben dann $f = 0$. Falls $a_i = 0$ für alle $i > 0$, dann heißt $f$ ein konstantes Polynom, und wir schreiben $f = a_0$. Insbesondere für $a_0 = 1, a_i = 0, i > 0$ heißt $f$ das Einspolynom.*
*Der Grad eines Polynoms $f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ist definiert durch*

$$\deg(f) := \begin{cases} -\infty & \text{falls } f = 0 \\ \max(i \in \mathbb{N} \mid a_i \neq 0) & \text{sonst} \end{cases}$$

In der Praxis schreibt man ein Polynom immer so auf, dass der höchste vorkommende Koeffizient ungleich Null ist, und dies ist dann der Grad des Polynoms. Warum man den Grad des Nullpolynoms mit $-\infty$ festlegt, sehen wir gleich, wenn wir die Multiplikation von Polynomen eingeführt haben.
Wir wollen nun zwei Verknüpfungen auf $K[x]$ definieren. Seien $f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ und $g = b_m x^m + b_{m-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + b_0$. Für die Definition der Addition können wir annehmen, dass $m = n$ ist, falls das nicht gilt, dann fügen wir einfach zu dem Polynom mit kleinerem Grad Monome mit Koeffizienten gleich Null hinzu, so dass $m = n$ gilt.

**Definition 3.20.** *Die Summe $f + g$ und das Produkt $f \cdot g$ sind definiert als*

$$f + g := (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n+1})x^{n-1} + \ldots + (a_0 + b_0)$$

*sowie*

$$f \cdot g := c_{m+n}x^{m+n} + c_{m+n-1}x^{m+n-1} + \cdot + c_1 x^1 + c_0,$$

*wobei die Koeffizienten $c_i \in K$ definiert sind durch*

$$c_i := a_0 \cdot b_i + a_1 \cdot b_{i-1} + \ldots + a_{i-1} \cdot b_1 + a_i \cdot b_0. \tag{3.5}$$

Die ersten Koeffizienten von $f \cdot g$ sind also

$$c_0 = a_0 b_0,\ c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0,\ c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0.$$

und der letzte ist $c_{n+m} = a_n b_m$.

**Satz 3.21.** *Die Menge $K[x]$ ist mit den eben definierten Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ ein kommutativer Ring mit Eins, wobei das Nullelement durch das Nullpolynom und das Einelement durch das Einspolynom gegeben ist. $(K[x], +, \cdot)$ heißt der Polynomring (in einer Variablen, nämlich $x$) über dem Körper $K$. Für $f, g \in K[x]$ gilt*

$$\deg(f + g) \leqslant \max(\deg(f), \deg(g)) \tag{3.6}$$
$$\deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g) \tag{3.7}$$

*Hierbei soll die Konvention $n + (-\infty) = (-\infty) + n = (-\infty) + (-\infty) = -\infty$ gelten.*

Jetzt ist auch klar, warum man $\deg(0) = -\infty$ setzen muss, hätte man $\deg(0) = 0$ gesetzt, dann wären die obigen Formeln nicht richtig.

*Beweis.* Das $(K[x], +)$ eine abelsche Gruppe ist, folgt durch direktes Nachrechnen (ähnlich wie im Fall $(R^n, +)$, da die Summe individuell bei den einzelnen Koeffizienten genommen wird, und diese nicht gemischt werden). Klar ist auch, dass das Nullpolynom das neutrale Element von $(K[x], +)$ ist. Ebenfalls klar ist, dass

der Grad von $f+g$ nicht größer als das Maximum der Grade von $f$ und $g$ sein kann (er kann kleiner sein, z.B. $f = x^2+1$, $g = -x^2+x$, dann ist $f+g = x+1$, und hat Grad 1, wohingegen $\deg(f) = \deg(g) = 2$ ist). Die Kommutativität der Multiplikation folgt aus der Definition von $\cdot$ auf $K[x]$, denn dabei geht die Multiplikation aus $K$ ein (nämlich in der Definition der Koeffizienten $c_i$), und diese ist kommutativ, da $K$ ein Körper ist. Das Distributivgesetz muss man explizit nachrechnen, was Sie als Übung einmal tun sollten. Man kann aber bemerken, dass die Multiplikation so definiert ist, das sie dem formalen Ausmultiplizieren

$$(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) \cdot (b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m)$$

entspricht, dies ist der Grund, warum das Distributivgesetz gilt. Das Einspolynom ist natürlich das Einelement von $(K[x], +, \cdot)$, wie man leicht aus der Formel (3.5) erkennt.
Wir müssen nun noch die Gradformel für die Multiplikation beweisen. Falls eines der beiden Polynome das Nullpolynom ist, dann ist auch $f \cdot g$ das Nullpolynom und der Grad auf beiden Seiten der Formel ist $-\infty$, und die Formel stimmt. Wir können also annehmen, dass weder $f$ noch $g$ das Nullpolynom ist. Seien $f$ und $g$ wie oben, und wir nehmen zusätzlich $\deg(f) = n$ und $\deg(g) = m$ an. Dies bedeutet genau, dass $a_n \neq 0$ und $b_m \neq 0$ ist (hier können wir natürlich nicht $n = m$ annehmen, brauchen es aber auch nicht). Dann folgt aus der Formel $c_{n+m} = a_n \cdot b_m$ und der Tatsache, dass $K$ ein Körper, also insbesondere nullteilerfrei ist, dass $c_{n+m} \neq 0$ ist, und damit muss $\deg(f \cdot g) = n+m$ sein, also gilt die Formel $\deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g)$. □

Wie wir schon weiter oben gesehen haben, können wir in einem Ring im Gegensatz zu einem Körper nicht immer Elemente durcheinander teilen, dies gilt insbesondere im Polynomring, welcher kein Körper ist. Trotzdem sagen wir, dass ein Polynom $f \in K[x]$ durch ein Polynom $g \in K[x]$ teilbar ist, falls es ein $h \in K[x]$ gibt, so dass

$$f = g \cdot h$$

ist. Wie auch im Ring der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ kann man nicht immer teilen, aber man hat als Ersatz das Teilen mit Rest.

**Satz 3.22.** *Seien $f, g \in K[x]$, sei $g \neq 0$, dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome $q, r \in K[x]$ mit folgenden Eigenschaften:*

$$f = q \cdot g + r \qquad \textit{und} \qquad \deg(r) < \deg(g). \tag{3.8}$$

Der Buchstabe $q$ steht für Quotient, der Buchstabe $r$ für Rest.

*Beweis.* Zunächst bemerken wir, dass die Bedingung $\deg(r) < \deg(g)$ wichtig ist, sonst könnte man immer $r = f$ und $q = 0$ setzen, und die erste Gleichung wäre erfüllt, ohne dass wir irgendeine Information gewonnen hätten. Tatsächlich ist dies auch die richtige Lösung, falls $\deg(f) < \deg(g)$ ist. Beim Beweis der Existenz von $q$ und $r$ können wir also annehmen, dass $\deg(f) \geqslant \deg(g)$ gilt. Sei

$$f = a_nx^n + \ldots + a_0 \qquad \text{und} \qquad g = b_mx^m + \ldots + b_0$$

mit $a_n \neq 0, b_m \neq 0$, also $\deg(f) = n$, $\deg(g) = m$ und $n \geqslant m$.
Wir geben jetzt einen Algorithmus an, mit dem man $q$ und $r$ findet, welche die obigen zwei Bedingungen erfüllen. Im ersten Schritt setzen wir

$$q_1 := \frac{a_n}{b_m}x^{n-m}$$

und betrachten

$$f_1 := f - q_1 \cdot g$$

Das das höchste Monom von $f$ gleich dem höchsten Monom von $q_1 \cdot g$ ist (nämlich gleich $a_nx^n$), wird es in $f_1$ ausgelöscht, d.h., wir haben $\deg(f_1) < \deg(f)$. Jetzt gibt es zwei Möglichkeiten: Entweder ist $\deg(f_1) < \deg(g)$, dann sind wir fertig, denn dann können wir einfach $r := f_1$ und $q := q_1$ setzen, und dann gilt die Gleichung $f = qg + r$, und wir haben $\deg(r) < \deg(g)$. Falls hingegen $\deg(f_1) \geqslant \deg(g)$ ist, dann müssen wir weiterrechnen: Wir führen den ersten Schritt noch einmal aus, aber nicht für $f$ und $g$, sondern für $f_1$ und $g$. Man erhält dann ein Monom $q_2$, und man setzt $f_2 := f_1 - q_2 \cdot g$, und dann ist wieder

$\deg(f_2) < \deg(f_1)$. Wenn man dieses Verfahren fortsetzt, ist klar, dass irgendwann einmal ein $k \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für

$$f_k := f_{k-1} - q_k \cdot g$$

*erstmals* gilt, dass $\deg(f_k) < \deg(g)$ ist. Es muss dann gelten

$$f = q_1 g + f_1 = q_1 g + (q_2 g + f_2) = \ldots = (q_1 + \ldots + q_k)g + f_k$$

also haben wir mit $r := f_k$ und $q := q_1 + \ldots + q_k$ Polynome gefunden, die die Bedingungen (3.8) erfüllen. Es bleibt die im Satz behauptete Eindeutigkeit von $q$ und $r$ zu beweisen. Angenommen, es gäbe $q', r' \in K[x]$, welche auch die Bedingungen

$$f = q' \cdot g + r' \qquad \text{und} \qquad \deg(r') < \deg(g).$$

erfüllen. Dann gilt

$$0 = f - f = (q - q') \cdot g + (r - r')$$

also $r' - r = (q - q') \cdot g$. Falls $q = q'$ ist, folgt sofort $r = r'$, und damit ist die Eindeutigkeit gezeigt. Falls hingegen $q \neq q'$ ist, folgt aus $g \neq 0$ (Voraussetzung) und der Gleichung (3.7), dass $\deg(r' - r) = \deg(g) + \deg(q - q')$ ist (wobei jetzt die Grade alle ungleich $-\infty$ sind). Insbesondere haben wir dann die Ungleichung

$$\deg(r' - r) = \deg(g) + \deg(q - q') \geqslant \deg(g)$$

Andererseits ist $r' - r = r' + (-r)$, und die Ungleichung (3.6) liefert $\max(\deg(r'), \deg(r)) \geqslant \deg(r' - r)$, also gilt $\deg(r') \geqslant \deg(g)$ oder $\deg(r) \geqslant \deg(g)$, und dies ist ein Widerspruch zur Annahme. □

Wir illustrieren den eben beschriebenen Algorithmus an einem Beispiel: Sei $f = 6x^3 + 5x^2 + 2x + 1$ und $g = 2x - 1$, dann schreiben wir den Polynomdivisionsalgorithmus in folgendem Schema:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrrr}
 & \big(6x^3 & + & 5x^2 & + & 2x & + & 1\big) & : & (2x-1) & = & 3x^2 + 4x + 3 \\
- & \big(6x^3 & - & 3x^2\big) & & & & & & & & \\
\cline{2-4}
 & & & 8x^2 & + & 2x & + & 1 & & & & \\
 & - & \big(8x^2 & - & 4x\big) & & & & & & & \\
\cline{3-5}
 & & & & & 6x & + & 1 & & & & \\
 & & - & \big(6x & - & 3\big) & & & & & & \\
\cline{4-6}
 & & & & & & & 4 & & & &
\end{array} \tag{3.9}$$

Damit gilt mit $q = 3x^2 + 4x + 3$, $r = 4$, dass $f = q \cdot g + r$ ist, und offensichtlich ist $0 = \deg(r) < \deg(g) = 1$. Es wurde vorher schon erwähnt, dass das Lösen von Gleichungen etwas mit *Nullstellen* von Polynome zu tun hat. Um Nullstellen erklären zu können, müssen wir Werte aus $K$ für die Unbestimmte $x$ eines Polynoms in $f \in K[x]$ einsetzen. Dann erhalten wir aus $f$ eine Abbildung $\widetilde{f} : K \to K$, welche einfach ein $a \in K$ auf $f(a)$ abbildet. Man fragt sich natürlich: Sind $f$ und $\widetilde{f}$ nicht einfach dasselbe. Die Antwort ist nein, wenn wir für $K$ einen endlichen Körper betrachten. Genauer gilt das folgende

**Lemma 3.23.** *Sei $K$ ein Körper, betrachte die Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} K[x] & \longrightarrow & Abb(K, K) \\ f & \longmapsto & (a \mapsto f(a)) \end{array}$$

*Diese Abbildung ist injektiv genau dann, wenn $K$ unendlich viele Elemente hat.*

Wir führen den Beweis etwas später. Der Satz sagt aber aus, dass es, falls $K$ endlich ist, zwei verschiedene Polynome geben kann, welche die gleiche Abbildung von $K$ nach $K$ darstellen. Daher müssen wir zwischen einem Polynom $f$ und der Abbildung $\overline{f}$ unterscheiden (aber nicht, falls $K$ unendlich ist).
Trotz der eben beschriebenen Schwierigkeit macht die folgende Definition Sinn.

**Definition 3.24.** *Eine Nullstelle eines Polynoms $f \in K[x]$ ist ein Element $\lambda$ in $K$, für das $f(\lambda) = 0$ gilt. Die Menge aller Nullstellen von $f$ wird mit*

$$V(f) := \{\lambda \in K \mid f(\lambda) = 0\}$$

*bezeichnet.*

Beispiele für Nullstellen sind:

1. Für $a \in K$ und $f = x - a$ ist $a$ die einzige Nullstelle von $f$, also $V(f) = \{a\}$.
2. Für $a_1, \ldots, a_n \in K$ und $f = (x - a_1) \cdot \ldots \cdot (x - a_n) \in K[x]$ ist $V(f) = \{a_1, \ldots, a_n\}$.
3. Sei $K = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, und $f = x^2 + x$, dann ist $f(0) = 0$ und $f(1) = 1^1 + 1 = 1 + 1 = 0$, also ist $V(f) = \{0, 1\} = K$.
4. Wenn $K = \mathbb{R}$ ist, und $f = x^2 + 1$, dann haben wir schon bei der Einführung der komplexen Zahlen im letzten Abschnitt gesehen, dass die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ keine Nullstellen hat, also ist $V(f) = \varnothing$.
5. Wenn wir $f = x^2 + 1 \in \mathbb{C}[x]$ betrachten, dann ist $V(f) = \{i, -i\}$.
6. Sei $K = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ ein endlicher Körper, und $f = (x - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_m) + 1 \in K[x]$, dann gilt $f(\lambda_i) = 1$ für alle $i = 1, \ldots, m$, und daher ist kein Element des Körpers $K$ eine Nullstelle von $f$, also $V(f) = \varnothing$.

Im allgemeinen kann es sehr schwer sein, Nullstellen eines vorgegebenen Polynoms zu finden oder auch nur, festzustellen, ob es überhaupt Nullstellen gibt. Falls man aber eine Nullstelle gefunden hat, sagt das nächste Lemma, wie man nach weiteren suchen muss.

**Lemma 3.25.** *Sei $f \in K[x]$ und sei $\lambda \in K$ Nullstelle von $f$. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Polynom $q \in K[x]$, so dass gilt*

1. $f(x) = (x - \lambda) \cdot q(x)$,
2. $\deg(q) = \deg(f) - 1$.

*Beweis.* Wegen Satz 3.22 gibt es $q, r \in K[x]$ mit $f(x) = q(x - \lambda) + r(x)$. Andererseits sagt der zitierte Satz, dass $\deg(r) < \deg((x - \lambda)) = 1$ ist, also muss $\deg(r) = 0$ oder $\deg(r) = -\infty$ gelten, und dann ist in jedem Fall $r = a_0 \in K$ ein konstantes Polynom. Wir haben also die Gleichung $f(x) = (x - \lambda) \cdot q(x) + a_0$. Wir können auf beiden Seiten dieser Polynomgleichung den Wert $\lambda$ einsetzen und erhalten dann eine Gleichheit von Elementen aus $K$. Da aber $f(\lambda) = 0$ ist, folgt $(\lambda - \lambda) \cdot q(\lambda) + a_0 = 0$, also ist $a_0 = 0$, und damit gilt $f(x) = (x - \lambda) \cdot q(x)$, dies beweist die erste Aussage. Die Gradformel für die Multiplikation von Polynomen ((3.7)) liefert dann, dass $\deg(f) = \deg(x - \lambda) + \deg(q)$ ist, also folgt $\deg(q) = \deg(f) - 1$. □

Damit können wir bei der Suche nach Nullstellen mit dem Polynom $q(x)$ weiterarbeiten, welches einen kleineren Grad als $f(x)$ hat. Es ergibt sich die folgende Konsequenz.

**Korollar 3.26.** *Sei $f \in K[x]$ mit $f \neq 0$. Dann hat $f$ höchstens $\deg(f)$ viele verschiedene Nullstellen.*

*Beweis.* Wir führen hier einen Beweis mittels vollständiger Induktion (siehe Satz 2.20), und zwar über den Grad $\deg(f)$ von $f$. Der Induktionsanfang ist der Fall $\deg(f) = 0$, dann ist $f$ ein konstantes Polynom (aber nicht das Nullpolynom), und daher hat es gar keine Nullstellen. Dann gilt die Aussage, die wir beweisen wollen, offensichtlich.
Als Induktionsvoraussetzung nehmen wir an, dass für ein festes $n$ gelte: Alle Polynome in $K[x]$ mit Grad kleiner $n$ erfüllen die zu beweisende Aussage, anders formuliert: Für alle $q \in K[x]$ mit $\deg(q) = k < n$ gelte: $q$ hat höchstens $k$ Nullstellen. Nun führen wir den Induktionsschritt aus: Sei $f \in K[x]$ mit $\deg(f) = n$. Falls $V(f) = \varnothing$ ist, dann ist die Anzahl der Nullstellen von $f$ gleich Null, und damit sicherlich kleiner oder gleich $n$. Falls $f$ eine Nullstelle $\lambda$ hat, dann folgt aus dem letzten Satz, dass es ein $q \in K[x]$ mit $\deg(q) = n - 1$ und $f(x) = (x - \lambda) \cdot q(x)$ gibt. Nach Induktionsvoraussetzung hat $q$ höchstens $n - 1$ verschiedene Nullstellen, und damit hat $f$ höchstens $n$ verschiedene Nullstellen. □

Wir können jetzt den oben versprochenen Beweis zum Unterschied eines Polynoms in $K[x]$ und der von ihm beschriebenen Abbildung von $K$ nach $K$ nachliefern.

*Beweis von Lemma 3.23.* Sei $K$ unendlich, dann müssen wir folgendes beweisen: Seien $f, g \in K[x]$, so dass $\widetilde{f} = \widetilde{g}$ gilt, dann muss auch $f = g$ sein. Betrachte das Polynom $h := f - g$. Es ist dann $\widetilde{h} = \widetilde{f - g} = \widetilde{f} - \widetilde{g} = 0$, d.h., $\widetilde{h}$ ist die Nullabbildung von $K$ nach $K$, und damit hat das Polynom $h$ unendlich viele Nullstellen (nämlich alle Elemente des Körpers $K$). Nach dem letzten Korollar kann das nur der Fall sein, wenn $h$ das Nullpolynom ist, aber wegen $h = f - g$ bedeutet das genau, dass $f = g$ ist.
Sei nun $K$ ein endlicher Körper, dann können wir die Elemente von $K$ aufzählen, etwa $K = \{a_1, \ldots, a_m\}$. Dann betrachten wir das Polynom $f(x) = (x-a_1)\cdot\ldots\cdot(x-a_m) \in K[x]$. Wie wir weiter oben in den Beispielen schon gesehen haben, ist dann $f(a_i) = 0$ für alle $i = 1, \ldots, m$, also $f(\lambda) = 0$ für alle $\lambda \in K$, dies heisst nichts anderes, als dass $\overline{f} = 0$ ist. $f$ ist aber nicht das Nullpolynom, also haben wir zwei verschiedene Polynome (nämlich $f \in K[x]$ und $0 \in K[x]$) und es gilt $\widetilde{f} = \widetilde{0}$. Damit ist die Abbildung $K[x] \to \mathrm{Abb}(K, K), f \mapsto \widetilde{f}$ für endliche Körper $K$ nicht injektiv. □

Wir haben also gesehen, dass der Grad eines Polynoms eine obere Schranke für die Anzahl der verschiedenen Nullstellen ist. Andererseits hat für eine Menge $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset K$ das Polynom $f = (x - a_1) \cdot \ldots \cdot (x - a_n)$ genau $n$ verschiedene Nullstellen. Um dies genauer zu verstehen, führen wir folgenden Begriff ein.

**Definition 3.27.** *Sei $f \in K[x]$, $f \neq 0$, dann heißt*

$$\mu(f, \lambda) := \max\left(r \in \mathbb{N}_0 : f = (x - \lambda)^r \cdot g,\ g \in K[x]\right)$$

*die Vielfachheit oder Multiplizität der Nullstelle $\lambda \in K$ von $f$.*

Man bemerke, dass Lemma 3.25 impliziert:

$$\mu(f, \lambda) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(\lambda) \neq 0$$

Eine Nullstelle der Multiplizität Null ist also gerade keine Nullstelle des Polynoms. Man sieht durch wiederholte Anwendung von Lemma 3.25, dass jedes Polynom $f \in K[x]$ mit $V(f) = \{\mu_1, \ldots, \mu_k\}$ als

$$f(x) = (x - \mu_1)^{r_1} \cdot \ldots \cdot (x - \mu_k)^{r_k} \cdot g(x) \tag{3.10}$$

schreiben lässt, wobei $g \in K[x]$ mit $\deg(g) = \deg(f) - (r_1 + \ldots + r_k)$, $V(g) = \varnothing$ sowie $r_i = \mu(f, \mu_i)$ für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$ ist. Für den Fall $K = \mathbb{C}$ können wir mit Hilfe des Fundamentalsatzes der Algebra (Satz 3.16) eine genauere Aussage treffen, welche manchmal auch als Fundamentalsatzes der Algebra bezeichnet wird.

**Satz 3.28** (Fundamentalsatz der Algebra, 2. Version)**.** *Sei $f = a_n x^n + \ldots + a_0 \in \mathbb{C}[x]$ (d.h. $a_i \in \mathbb{C}$ für $i = 0, \ldots, n$). Dann existieren $c \in \mathbb{C}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ mit*

$$f(x) = c \cdot (x - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_n).$$

Man beachte, dass die komplexen Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ nicht paarweise verschieden seien müssen.

*Beweis.* Wir benutzen zunächst die Darstellung von $f$ in Gleichung (3.10). Da aber das dort vorkommende Polynom $g$ in $\mathbb{C}[x]$ liegt, sagt der Fundamentalsatz der Algebra in seiner erste Version, dass entweder $\deg(g) = 0$ ist, oder $g$ mindestens eine Nullstelle hat, also $V(g) \neq \varnothing$ ist. Der zweite Fall kann nicht eintreten, also ist $\deg(g) = 0$, $g$ ist also ein konstantes Polynom, sagen wir $g = c \in \mathbb{C}$, und dann haben wir eine Darstellung

$$f(x) = c \cdot (x - \mu_1)^{r_1} \cdot \ldots \cdot (x - \mu_k)^{r_k}.$$

Durch umbenennen der Nullstellen $\mu_1, \ldots, \mu_k$ in $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (wobei bei den $\lambda_i$'s wie gesagt gleiche Nullstellen mehrfach vorkommen können, aber nicht bei den $\mu_i$'s) erhalten wir genau die gewünschte Darstellung. □

Es sei noch angemerkt, dass mit dem Fundamentalsatz der Algebra nur gesagt wird, dass ein komplexes Polynom vom Grad $n$ immer $n$ Nullstellen hat, wenn man diese mit Vielfachheit zählt. Wie man diese Nullstellen findet, ist ein ganz anderes Problem, welches die Mathematik viele Jahrhunderte hindurch beschäftigt hat. Man hat schließlich für Polynome der Grade 2, 3 und 4 explizite Lösungsformeln gefunden (die vom Grad zwei kennen sie alle, wenn $f = x^2 + px + q$ ist, dann gibt es die zwei Nullstellen $x_{1,2} = -p/2 \pm \sqrt{p^2/4 - q}$). Eine Durchbruch in der Frage nach solchen Formeln für Polynome höheren Grades brachten die Arbeiten von Abel und Galois Anfang des 19. Jahrhunderts: Durch für damalige Verhältnisse sehr schwierige und tiefsinnige Überlegungen konnten sie zeigen, dass solche Formeln für Polynome vom Grad größer oder gleich 5 nicht existieren *können*. Dieser Satz wird ausführlich in einer Algebra-Vorlesung behandelt, und gehört zu den Sternstunden der Mathematik.

# Kapitel 4

# Vektorräume

In diesem Kapitel beginnen wir, die zentralen Objekte der linearen Algebra zu untersuchen. Vektorräume sind jedem aus der Anschauung bekannt, nämlich als Menge aller Vektoren in $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$, aber wahrscheinlich kennen Sie die abstrakte Definition, die unten gegeben wird, noch nicht. Es handelt sich um eines der wichtigsten und natürlichsten Konzepte der gesamten Mathematik, welches überall, in der Algebra, der Analysis, der Geometrie, und natürlich in allen Anwendungen wie Numerik, Stochastik etc. von zentraler Bedeutung ist. Wir werden viel Beispiele von Vektorräumen studieren, sowie die wichtigsten Strukturaussagen, wie die Existenz von Basen, den Dimensionsbegriff etc. erklären.
Ab diesem Kapitel wird die Darstellung in diesem Skript etwas weniger ausführlich sein. Sie sollen dadurch ermuntert werden, über die eventuell fehlenden oder knapp gehaltenen Argumente selbst nachzudenken. Ein solches „aktives“ Lesen eines mathematischen Textes ist eine fundamentale Kompetenz, welche Sie im Studium und darüber hinaus benötigen, und es ist daher gut, dies frühzeitig zu trainieren.

## 4.1 Grundlagen, Erzeugendensysteme und lineare Unabhängigkeit

Wir starten gleich mit der Definition eines Vektorraumes $V$ über einem Körper $K$. Um die folgende Definition zu verstehen, denken Sie immer an den Fall $K = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}^n$. Dann haben wir zwei offensichtliche Operationen, nämlich die Addition von Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$, wenn $v = (v_1, \ldots, v_n)$ und $w = (w_1, \ldots, w_n)$ ist, dann können wir $v+w = (v_1+w_1, \ldots, v_n+w_n)$ definieren, dies nennt man manchmal auch *komponentenweise* Addition. Die zweite Operation ist die sogenannte Skalarmultiplikation: Für eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ und einen Vektor $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ können wir den Vektor $c \cdot x$ als $(c \cdot x_1, \ldots, c \cdot x_n)$ definieren. Dies wollen wir nun in einen abstrakten Rahmen fassen.

**Definition 4.1.** *Sei $K$ ein beliebiger Körper und $V$ einen beliebige Menge. Es sei eine Verknüpfung*

$$+ : V \times V \longrightarrow V$$

*gegeben (meist Addition genannt). Darüber hinaus sei eine Abbildung*

$$\cdot : K \times V \longrightarrow V,$$

*genannt Skalarmultiplikation gegeben. Dann heißt das Tripel $(V, +, \cdot)$ (oder einfach die Menge $V$, wenn die Operationen $+$ und $\cdot$ klar sind) ein* Vektorraum *über dem Körper $K$, falls die folgenden Axiome gelten:*

**V1** *Das Paar $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe, deren neutrales Element mit $0$ bezeichnet und Nullvektor genannt wird. Das Inverse eines Vektors $v \in V$ wird $-v$ geschrieben.*

**V2** *Die Skalarmultiplikation erfüllt die folgenden Gesetze für alle $\lambda, \mu \in K$ und alle $v, w \in V$:*

$$\begin{array}{rclcrcl} (\lambda + \mu) \cdot v & = & \lambda \cdot v + \mu \cdot v & , & \lambda \cdot (v + w) & = & \lambda \cdot v + \lambda \cdot w \\ \lambda \cdot (\mu \cdot v) & = & (\lambda\mu) \cdot v & , & 1 \cdot v & = & v \end{array}$$

Man überlege sich bei den Gesetzen in V2 in jedem Fall, welche Operationen genau benutzt werden. Zum Beispiel sind in $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda\mu) \cdot v$ alle eingezeichneten Malpunkte Symbole für die Skalarmultiplikation, aber das Produkt $\lambda\mu = \lambda \cdot \mu$ ist natürlich die Multiplikation im Körper $K$. Analog muss man in $(\lambda+\mu)\cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$ die Addition in $V$ und die Addition im Körper $K$ unterscheiden.

**Beispiele:**

1. Für jeden Körper $K$ (z.B. $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_p$) können wir die Menge $K^n$ betrachten, und, wie schon oben angedeutete, für alle $\lambda \in K, v = (v_1, \ldots, v_n), w = (w_1, \ldots, w_n) \in K^n$ definieren:

$$v + w := (v_1 + w_1, \ldots, v_n + w_n) \qquad \lambda \cdot v := (\lambda v_1, \ldots, \lambda v_n)$$

   Dann kann man ganz leicht nachrechnen, dass die Axiome V1 und V2 erfüllt sind, also ist $(K^n, +, \cdot)$ ein $K$-Vektorraum.

2. Wir betrachten nun die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. Diese bilden, wie wir gesehen haben, selbst einen Körper, aber wir wollen sehen, dass sie auch ein Vektorraum über den reellen Zahlen sind. Sei also $K := \mathbb{R}$, und $V := \mathbb{C}$, dann ist $(V, +)$ natürlich eine abelsche Gruppe, aber es gibt auch eine Skalarmultiplikation $K \times V \to V$, denn jede reelle Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ ist natürlich auch eine komplexe Zahl, und wir können sie mit einer anderen komplexen Zahl $c \in \mathbb{C}$ multiplizieren. Auch hier sieht man sofort, dass V1 und V2 erfüllt sind, und daher ist $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum (noch einmal Vorsicht, hier bezeichnet die Operation $\cdot$ *nicht* die Multiplikation innerhalb $\mathbb{C}$, sondern die eben erklärte Skalarmultiplikation $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$).

3. Wir betrachten die schon in Kapitel 1 eingeführten Matrizen. Sei $M(m \times n, K)$ die Menge der $m \times n$-Matrizen (also Matrizen mit $m$ Zeilen und $n$ Spalten) deren Einträge aus einem vorgegebenen Körper $K$ stammen (wie wir später sehen werden, kann man damit alle wichtigen Operationen, insbesondere die Matrizenmultiplikation durchführen, so, wie wir das in Kapitel 1 für den Fall $K = \mathbb{R}$ getan haben). Seien Matrizen $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ gegeben, hierbei sind $i \in \{1, \ldots, m\}$ und $j \in \{1, \ldots, n\}$, und sei $\lambda \in K$. Dann definieren wir

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij}) \qquad \lambda \cdot A := (\lambda a_{ij}),$$

   d.h., die Summe der Matrizen $A$ und $B$ ist die Matrix, welche als Eintrag auf der Position $(i, j)$die Summe der Einträge bei $(i, j)$ von $A$ und $B$ hat, und das Skalarprodukt von $\lambda$ mit $A$ hat als $(i, j)$-Eintrag genau das Körperelement $\lambda a_{ij}$. Damit ist $M(m \times n, K)$ ein Vektorraum über $K$, wie man durch Nachprüfen der Axiome V1 und V2 leicht sieht.

4. Wir haben im letzten Kapitel die Menge der Polynome $K[t]$ mit der Struktur eines Ringes (kommutativ, mit Eins) versehen. Aber $K[t]$ ist auch ein $K$-Vektorraum: Natürlich hat $(K[t], +)$ die Struktur einer abelschen Gruppe (das brauchten wir schon zur Definition der Ringstruktur), und die Skalarmultiplikation erklären wir durch

$$\begin{array}{rcl} K \times K[t] & \longrightarrow & K[t] \\ (\lambda, a_n t^n + \ldots + a_0) & \longmapsto & (\lambda a_n) t^n + \ldots + (\lambda a_0) \end{array}$$

   Auch hier kann man die Axiome V1 und V2 direkt nachprüfen.

5. Sei $K$ ein Körper und $M$ eine beliebige Menge. Dann hat die Menge $\mathrm{Abb}(M, K)$ die Struktur eines $K$-Vektorraumes, indem für zwei Funktionen $f, g \in \mathrm{Abb}(M, K)$ und ein Element $c \in K$ die Addition $f + g$ und die Skalarmultiplikation $c \cdot f$ folgendermaßen definieren:

$$\begin{array}{rcl} (f+g) : M & \longrightarrow & K \\ x & \longmapsto & f(x) + g(x) \end{array} \quad , \quad \begin{array}{rcl} (c \cdot f) : M & \longrightarrow & K \\ x & \longmapsto & c \cdot f(x) \end{array}$$

   Das erste Beispiel $K^n$ ist ein Spezialfall dieses letzten, denn offensichtlich ist die Menge $K^n$ genau die Menge $\mathrm{Abb}(\{1, \ldots, n\}, K)$, und die in beiden Fällen definierten Additonen und Skalarmultiplikationen sind genau die gleichen.

Aus den Axiomen V1 und V2 können wir sofort weitere Rechenregeln in Vektorräumen ableiten.

**Lemma 4.2.** *Sei $K$ ein Körper und $V$ ein $K$-Vektorraum. Dann gelten die folgenden Aussagen für alle $v \in V$ und alle $\lambda \in K$:*

1. $0 \cdot v = \mathbf{0}$,
2. $\lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$,
3. $\lambda \cdot v = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \lambda = 0 \quad$ *oder* $\quad v = \mathbf{0}$,
4. $(-1) \cdot v = -v$.

*Hierbei soll die fettgedruckte* $\mathbf{0}$ *das Nullelement im Vektorraum $V$ und die normalgedruckte* $0$ *das Nullelement des Körpers $K$.*

*Beweis.* Alle Aussagen sind durch kurzes Nachrechnen zu beweisen, genauer:

1. $0 \cdot v = (0 + 0) \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v$,
2. $\lambda \cdot \mathbf{0} = \lambda \cdot (\mathbf{0} + \mathbf{0}) = \lambda \cdot \mathbf{0} + \lambda \cdot \mathbf{0}$,
3. Sei $\lambda \cdot v = \mathbf{0}$, und nehmen wir an, dass $\lambda \neq 0$ ist, dann folgt
$$v = 1 \cdot v = (\lambda^{-1} \cdot \lambda) \cdot v = \lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot v) = \lambda^{-1} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$
4. $v + (-1) \cdot v = 1 \cdot v + (-1) \cdot v = (1 + (-1)) \cdot v = 0 \cdot v = 0$, also ist $(-1) \cdot v$ das Inverse von $v$ bezüglich der Addition $+$ in $V$, d.h. $(-1) \cdot v = -v$.

□

Zur Vereinfachung der Notation werden wir in Zukunft das Nullelement in $V$ nicht fettschreiben, dies ist in gewisser Weise durch die obigen Regeln 1.-3. gerechtfertigt. Trotzdem sollten Sie sich immer vor Augen führen, ob eine Gleichung in $V$ oder in $K$ gilt, aus welcher der beiden Mengen die auftretenden Elemente kommen, und auch, welche Verknüpfungen bzw. Operationen genau gemeint sind.
Wie auch bei anderen algebraischen Strukturen (z.B. Gruppen und Körpern) reicht es nicht aus, nur einen einzigen Vektorraum zu betrachten, sondern man muss mehrere in Verbindung setzen. Dies werden wir im nächsten Kapitel ausführlich machen, indem wir gewissen Abbildungen (nämlich die sogenannten linearen Abbildungen) zwischen zwei Vektorräumen betrachten, hier begnügen wir uns mit einem wichtigen Spezialfall, nämlich dem eines *Unterverktorraumes*. Die Idee ist ganz ähnlich wie bei Untergruppen.

**Definition 4.3.** *Sei $V$ ein $K$-Vektorraum, und $W \subset V$ eine Teilmenge. Dann heißt $W$ Unterverktorraum von $V$, falls die folgenden Axiome gelten:*

**UV1** $0 \in W$,

**UV2** $\forall x, y \in W : x + y \in W$,

**UV3** $\forall \lambda \in K, \forall x \in W : \lambda \cdot x \in W$.

Wir haben eine zu Lemma 3.5 vergleichbare Aussage, dass nämlich ein Untervektorraum auch tatsächlich ein Vektorraum ist.

**Lemma 4.4.** *Sei $W$ ein Untervektorraum eines $K$-Vektorraumes $V$. Dann ist $W$ selbst ein $K$-Vektorraum bezüglich der von $V$ induzierten Addition und Skalarmultiplikation.*

*Beweis.* Wie im Beweis von Lemma 3.5 müssen wir beweisen, dass wir Verknüpfungen $+ : W \times W \to W$ und $\cdot : K \times W \to W$ bekommen. Dies folgt aber genau aus UV2 und UV3. Wegen UV3 folgt (mit $\lambda = -1$) aber, dass für $v \in W$ auch $-v$ in $W$ ist, und dann sieht man wegen $UV1$ sofort, dass $(W, +) \subset (V, +)$ eine Untergruppe ist, also insbesondere selbst eine abelsche Gruppe. Damit ist V1 für den Untervektorraum $W$ erfüllt. Die Gesetze V2 gelten für $W$, weil sie schon für $V$ gelten. Damit erfüllt $(W, +, \cdot)$ die beiden Vektorraumaxiome, und ist also selbst ein Vektorraum. □

Nun wollen wir einige Beispiele von Untervektorräumen behandeln:

1. Für alle $V$ sind $W := \{0\} \subset V$ und $W := V \subset V$ immer Untervektorräume.

2. Sei $K = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}^2$. Seien $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$ und $c \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ gegeben. Betrachte die Mengen

$$W_1 := \{(x, y) \in V | ax + by = 0\} \qquad ; \qquad W_2 := \{(x, y) \in V | ax + by = c\}$$

   Dann ist $W_1$ ein Untervektorraum von $V$ (bitte prüfen Sie die Axiome UV1, UV2 und UV3 nach), $W_2$ aber nicht, denn $(0, 0) \in V$ ist keine Lösung von $ax + by = c$, also nicht in der Menge $W_2$ enthalten (siehe die Abbildung 4.1).

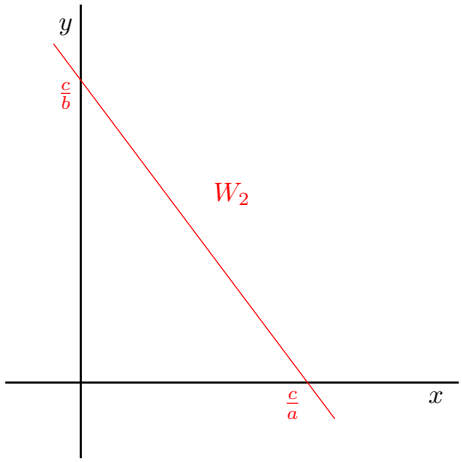



Abbildung 4.1: Gerade in der Ebene.

3. Ganz allgemein ist für eine $m \times n$-Matrix $A$ mit Einträgen aus $\mathbb{R}$ die Lösungsmenge

$$\text{Lös}\,(A, 0) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$$

   (siehe Gleichung (1.2)) ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$, wie man sofort durch Nachprüfen von UV1, UV2 und UV3 feststellt.

4. Im folgenden Bild sind in rot Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ dargestellt, welche die Axiome UV1 und UV2 bzw UV1 und UV3 erfüllen, aber trotzdem keine Untervektorräume sind.

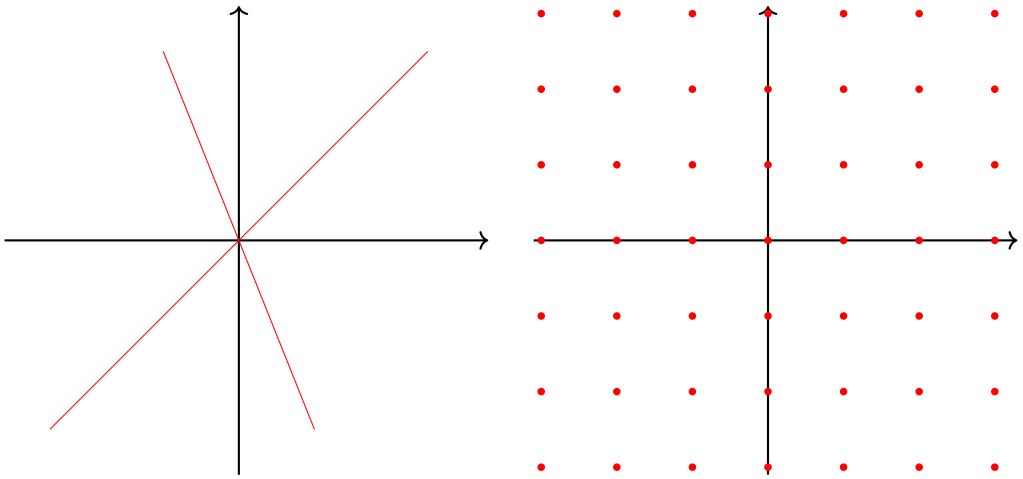


Abbildung 4.2: Nicht-Untervektorräume.

5. Wir hatten in Lemma 3.23 gesehen, dass ein Polynom mit Koeffizienten aus einem unendlichen Körper als Abbildung von diesem Körper in sich selbst aufgefasst werden kann, insbesondere gilt also $\mathbb{R}[t] \subset \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Man sieht leicht, dass dann $\mathbb{R}[t]$ ein Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ist.

6. Das letzte Beispiel können wir noch etwas erweitern, dazu verwenden wir einige Dinge, die in der Analysis behandelt werden: Sei $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ die Menge der stetigen Funktionen, und $\mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ die Menge der differenzierbaren Funktionen. Dann gilt

$$\mathbb{R}[t] \subset \mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}),$$

   und jede Inklusion ist immer die Inklusion eines Untervektorraumes in einen $\mathbb{R}$-Vektorraum.

7. Sei $K$ ein beliebiger Körper und sei $d \in \mathbb{N}$, dann definieren wir

$$K[t]_{\leqslant d} := K[t]_d := \{f \in K[t] \mid \deg(f) \leqslant d\}$$

   als die Menge der Polynome vom Grad höchstens $d$. Wir haben also

$$\begin{aligned} K[t]_0 &= \{a_0 \mid a_0 \in K\} = K \\ K[t]_1 &= \{a_0 + a_1 t \mid a_0, a_1 \in K\} = K^2 \\ K[t]_2 &= \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in K\} = K^3. \end{aligned}$$

   Dann ist $K[t]_d$ ein $K$-Vektorraum, den man mit $K^{d+1}$ identifizieren kann, und $K[t]_d$ ist ein Untervektorraum von $K[t]$.

Im weiteren Verlauf der Vorlesung werden wir häufig den Durchschnitt (im Sinne der Mengentheorie) von zwei oder mehreren Vektorräumen betrachten. Es stellt sich heraus, dass diese Schnittmenge wieder ein Vektorraum ist, wie die nächste Aussage zeigt.

**Lemma 4.5.** *Sei $V$ ein Vektorraum über einem Körper $K$, $I$ eine Indexmenge, und sei für jedes $i \in I$ ein Untervektorraum $W_i \subset V$ gegeben. Dann ist die die Menge*

$$W := \bigcap_{i \in I} W_i \subset V$$

*zusammen mit der von $V$ induzierten Addition und Skalarmultiplikation wieder ein $K$-Vektorraum.*

*Beweis.* Wir prüfen einfach die Axiome UV1, UV2 und UV3 für $W$ nach, unter der Voraussetzung, dass sie für alle $W_i$ gelten. UV1 ist klar, denn wenn für alle $i \in I$ gilt, dass $0 \in W_i$ ist, dann ist 0 auch in $W$ enthalten. Um UV2 nachzuweisen, wählen wir $x, y \in W$, das bedeutet aber, dass für alle $i \in I$ gilt, dass $x, y \in W_i$ liegen. Jetzt verwenden wir, dass für jedes einzelne $W_i$ das Axiom UV2 gilt, also ist auch $x + y \in W_i$, und da das für alle $i \in I$ wahr ist, folgt wieder $x + y \in W$. Mit exakt dem gleichen Argument zeigt man, dass für $x \in W$ und $\lambda \in K$ auch $\lambda x \in W$ gilt, also die Gültigkeit von UV3 für $W$. □

Als Beispiel für einen wie im Lemma diskutierte unendlichen Schnitt von Untervektorräumen betrachten wir im $K$-Vektorraum $K[t]$ die Untervektorräume $K[t]_d$ aller Polynome mit Koeffizienten aus $K$ vom Grad kleiner oder gleich $d$. Dann ist

$$\bigcap_{d \in \mathbb{N}_0} K[t]_d = K[t]_0 = K$$

und $K$ ist natürlich ein Vektorraum über sich selbst.
**Bemerkung:** Man kann sich natürlich fragen, warum wir im Lemma nur den Schnitt von (eventuell unendlich vielen) Vektorräumen, aber nicht deren Vereinigung betrachtet haben. Die Antwort ist einfach, dass dann die Aussage im Allgemeinen falsch ist. Als Beispiel kann man zwei Geraden durch den Ursprung in $\mathbb{R}^2$ betrachten, wenn diese nicht gleich sind, ist ihre Vereinigung kein Untervektorraum mehr, weil, wie schon oben (siehe Bild 4.2) erwähnt, dann UV2 nicht mehr gültig ist. Genauer gilt sogar die folgende Aussage.

**Lemma 4.6.** *Seien $W \subset V$ und $W' \subset V$ Untervektorräume eines $K$-Vektorraums $V$. Angenommen, die Vereinigung $W \cup W'$ ist auch ein Untervektorraum von $V$. Dann folgt, dass $W \subset W'$ oder $W' \subset W$ gilt.*

*Beweis.* Nehmen wir an, dass $W$ nicht in $W'$ enthalten ist, dass also $W \not\subset W'$ gilt. Das heisst nicht anderes, als dass es ein $x \in W$ gibt, für das $x \notin W'$ gilt. Wir beweisen jetzt, dass dann notwendigerweise $W' \subset W$ gelten muss. Sei also $y \in W'$. Dann gilt $x, y \in W \cup W'$, und wegen der Annahme, dass $W \cup W'$ ein Vektorraum ist, folgt, dass $x + y \in W \cup W'$ gilt. Falls $x + y \in W'$ gilt, dann haben wir einen Widerspruch, denn dann ist auch $x = (x + y) - y$ ein Element von $W'$, denn sowohl $x + y$ als auch $y$ liegen in $W'$. Also gilt $x + y \in W$, aber wegen $x \in W$ ist dann auch $y = (x + y) - x$ ein Element von $W$, und dies beweist $W' \subset W$, wie gewünscht. □

Im Folgenden werden wir häufig die Situation antreffen, dass eine Teilmenge eines Vektorraums gegeben ist, die aber kein Untervektorraum ist (das einfachste Beispiel ist einfach eine Menge, welche aus einem Vektor ungleich dem Nullvektor besteht). Dann möchte man diese Menge geeignet vergrößern, so dass sie ein Untervektorraum wird. Dazu benötigen wir folgenden Begriff.

**Definition 4.7.** *Sei $V$ ein $K$-Vektorraum.*

1. *Seien Vektoren $v_1, \ldots, v_r \in V$ gegeben. Dann heißt der Vektor*

$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r$$

*Linearkombination von $v_1, \ldots, v_r$, wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ Elemente von $K$ sind. Wir nennen*

$$Span_K(v_1, \ldots, v_n) := \{\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K\}$$

*den von den Vektoren $v_1, \ldots, v_r$ aufgespannten oder erzeugten Untervektorraum von $V$.*

2. *Je nach Situation schreibt man auch:*

$$Kv_1 + \ldots + Kv_r := \langle v_1, \ldots, v_r \rangle_K := Span_K(v_1, \ldots, v_n)$$

3. *Sei $I$ eine Indexmenge und $(v_i)_{i \in I}$ eine Familie von Vektoren in $V$. Dann heißt ein Vektor $v \in V$ eine Linearkombination von Elementen aus $(v_i)_{i \in I}$ wenn es eine* endliche *Teilmenge $\{i_1, \ldots, i_r\} \subset I$ und Körperelemente $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$ gibt, so dass*

$$v = \lambda_1 v_{i_1} + \ldots + \lambda_r v_{i_r}.$$

*Wieder schreiben wir*

$$\mathit{Span}_K((v_i)_{i\in I}) := \{\lambda_1 v_{i_1} + \ldots + \lambda_r v_{i_r} \mid r \in \mathbb{N}, \{i_1, \ldots, i_r\} \subset I, \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K\}$$

Gelegentlich werden wir den Index $K$ weglassen, falls offensichtlich ist, über welchem Körper der Vektorraum bzw. seine Untervektorräume definiert sind.
Natürlich sollten wir prüfen, dass die Menge $\mathrm{Span}\,((v_i)_{i\in I})$ auch wirklich die Eigenschaften hat, die wir benötigen.

**Lemma 4.8.** *Sei $V$ ein Vektorraum und $(v_i)_{i\in I}$ eine Familie von Elementen aus $V$. Dann gilt*

1. *Span $((v_i)_{i\in I})$ ist ein Untervektorraum von $V$.*
2. *Span $((v_i)_{i\in I})$ ist der kleinste Untervektorraum von $V$, welcher alle Elemente $v_i$ enthält, genauer gilt: Falls $W \subset V$ ein Untervektorraum ist, so dass $v_i \in W$ für alle $i \in I$, dann folgt Span $((v_i)_{i\in I}) \subset W$.*

*Beweis.* 1. Die Definition von Span $((v_i)_{i\in I})$ ist gerade so gemacht, dass die Axiome UV1-UV3 erfüllt sind, z.B. folgt UV2 daraus, dass die Summe zweier Linearkombinationen auch wieder eine Linearkombination ist.

2. Falls $W$ ein Untervektorraum von $V$ ist, und alle Elemente $v_i$ enthält, dann müssen wegen der Axiome UV2 und UV3 auch alle endlichen Linearkombinationen aus $(v_i)_{i\in I}$ in $W$ enthalten sein, das bedeutet aber nichts anderes, als dass Span $((v_i)_{i\in I}) \subset W$ gilt.

□

An dieser Stelle wollen wir noch einmal kurz auf den in der Definition 4.7 verwendeten Begriff der *Familie* von Vektoren eingehen, da dieser in Zukunft häufiger auftreten wird: Eine durch eine Menge $I$ indizierte Familie von Vektoren $(v_i)_{i\in I}$ aus einem Vektorraum $V$ könnte man formal als eine Abbildung $I \to V$ definieren, welche dem Index $i \in I$ eben den Vektor $v_i \in V$ zuordnet. Der Unterschied zu einer Teilmenge von $V$ ist, dass bei einer Familie Vektoren auch mehrfach vorkommen dürfen. Falls $I$ endlich oder abzählbar ist, bedeutet dies auch, dass die Elemente einer Familie mit einer natürlich Reihenfolge ausgestattet sind, wenn wir eine Bijektion $\mathbb{N} \to I$ (für unendlich abzählbares $I$) bzw. $\{1, \ldots, n\} \to I$ (für endliches $I$) fixieren.
**Beispiele:**

1. Sei $K = \mathbb{R}$, dann besteht für ein beliebiges $v \in \mathbb{R}^n$ der Untervektorraum $\langle v\rangle = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n$ aus allen Vielfachen von $v$. Falls $v \neq 0$ gilt, dann ist $\langle v\rangle$ die Gerade durch 0 und $v$.
2. Sei $V = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R}$, dann gilt $\mathrm{Span}\,((1,0),(0,1)) = \mathbb{R}^2$, aber auch $\mathrm{Span}\,((1,0),(0,1),(1,1)) = \mathbb{R}^2$.
3. Das letzte Beispiel kann man folgendermaßen verallgemeinern: Sei $K$ beliebig und $V = K^n$. Setze

   $$e_i := (\underbrace{0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0}_{i-\text{te Stelle}}) \in V,$$

   hierbei sollen alle Einträge von $e_i$ gleich Null sein, außer dem an der $i$-ten Stelle, dieser ist gleich 1. Der Vektor $e_i$ heißt der $i$-te Einheitsvektor von $K^n$. Dann gilt

   $$\mathrm{Span}_K(e_1, \ldots, e_n) = V.$$

   Andererseits gilt für jede echte Teilmenge $I \subsetneq \{1, \ldots, n\}$, dass $\mathrm{Span}\,((e_i)_{i\in I}) \subsetneq K^n$ ist, dass also der von $(e_i)_{i\in I}$ erzeugte Vektorraum ein echter Untervektorraum von $K^n$ ist.
4. Sei $V = K[t]$, sei $I = \mathbb{N}$ und $v_i := t^i$ für alle $i \in I$. Dann gilt

   $$\mathrm{Span}_K((v_i)_{i\in I}) = K[t].$$

   Andererseits ist

   $$\mathrm{Span}_K(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n)_K = K[t]_n,$$

   also der Untervektorraun von $K[t]$ bestehend aus allen Polynomen vom Grad kleiner oder gleich $n$.

Wir haben im Beispiel $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}(1,0) + \mathbb{R}(0,1)$ sowie $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}(1,0) + \mathbb{R}(0,1) + \mathbb{R}(1,1)$ gesehen, dass ein und derselbe Vektorraum auf verschiedene Arten erzeugt werden kann. Offensichtlich ist hier die erste Variante „besser“, denn es werde nur 2 Vektoren benötigt. Da hat den angenehmen Effekt, dass für einen gegebenen Vektor $v = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ die Linearkombination $v = a \cdot (1,0) + b \cdot (0,1)$ eindeutig bestimmt ist. Hingegen gilt $v = a(1,0) + b(0,1) + 0(1,1)$ und $v = 0(1,0) + (b-a)(0,1) + a(1,1)$, d.h., die Darstellung unter Zuhilfenahme des zweiten Erzeugendensystems ist nicht mehr eindeutig. Es ist also wünschenswert Untervektorräume mit möglichst wenigen Vektoren zu erzeugen. Man kann sich bei diesem Beispiel auch leicht savon überlegen, dass man $\mathbb{R}^2$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum niemals mit einem einzigen Vektor erzeugen kann.
Dies motiviert die folgenden Definitionen.

**Definition 4.9.** *Sei $V$ ein $K$-Vektorraum und seien $v_1, \ldots, v_n \in V$. Dann heißt die Familie $(v_1, \ldots, v_n)$* linear unabhängig, *falls gilt: Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ beliebig, so dass*

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$$

*ist, dann folgt automatisch, dass $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ ist. Mit anderen Worten: Der Nullvektor kann nur durch die triviale Linearkombination $0 \cdot v_1 + \ldots + 0 \cdot v_n = 0$ kombiniert werden. Falls die Familie $(v_1, \ldots, v_n)$ nicht linear unabhängig ist, heißt sie* linear abhängig.
*Sei $I$ eine Indexmenge, und $(v_i)_{i \in I}$ eine beliebige Familie von Vektoren aus $V$. Dann heißt $(v_i)_{i \in I}$ linear unabhängig, falls jede endliche Teilfamilie $(v_i)_{i \in J}$ mit $J \subset I$, $|J| < \infty$ linear unabhängig ist. Auch hier nennen wir die Familie $(v_i)_{i \in I}$ linear abhängig, wenn sie nicht linear unabhängig ist, wenn es also eine endlich Teilfamilie $(v_{i_1}, \ldots, v_{i_n})$ und Koeffizienten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ gibt mit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$, so dass*

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_{i_j} = 0$$

*gilt. Schlussendlich legen wir fest, dass die leere Menge als linear unabhängig gelten soll.*

Wir illustrieren den Begriff der linearen Unabhängigkeit zunächst an einigen Beispielen.

1. Die einelementige Familie $(v)$, wobei $v \in V$ gilt, und $V$ ein beliebiger $K$-Vektorraum ist, ist linear unabhängig, falls $v \neq 0$ ist, und linear abhängig für $v = 0$.

2. Eine Familie $(v_i)$, in der ein Vektor $v$ zweimal vorkommt, ist immer linear abhängig, denn die Summe $1 \cdot v + (-1) \cdot v = 0$ ist eine nicht-triviale Kombination des Nullvektors. Genauso ist jede Familie, welche den Nullvektor als Element enthält, automatisch linear abhängig.

3. Die beiden Vektoren $(1,0)$ und $(0,1)$ sind in $\mathbb{R}^2$ linear unabhängig. Hingegen sind die drei Vektoren $(1,0)$, $(0,1)$ und $(1,1)$ in $\mathbb{R}^2$ linear abhängig, denn es gilt

$$1 \cdot (1,0) + 1 \cdot (0,1) + (-1) \cdot (1,1) = 0.$$

4. Allgemein gilt: Die Vektoren $e_1, \ldots, e_n$ (oder eine beliebige Teilmenge davon) sind im $K$-Vektorraum $V := K^n$ linear unabhängig.

Das nächste Lemma ist eine Charakterisierung von linearer Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit. Sie zeigt, dass der in der Definition verwendete Nullvektor keine wirklich besondere Bedeutung hat, wenn man lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit testen möchte.

**Lemma 4.10.** *Sei $(v_i)_{i \in I}$ eine Familie von Elementen eines $K$-Vektorraumes $V$. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

1. *Die Familie $(v_i)_{i \in I}$ ist linear unabhängig.*

2. *Jeder Vektor $v \in \mathrm{Span}_K((v_i)_{i \in I})$ läßt sich in eindeutiger Weise als (endliche) Linearkombination von Elementen von $(v_i)_{i \in I}$ schreiben.*

*Beweis.* **„⇒“:** Sei $v \in \text{Span}\,((v_i)_{i\in I})$ und nehmen wir an, es gäbe zwei Darstellungen

$$v = \sum_{i\in I} \lambda_i v_i = \sum_{i\in I} \mu_i v_i.$$

Hierbei sollen jeweils nur endlich viele der Koeffizienten $\lambda_i$ und $\mu_i$ ungleich Null sein (aber natürlich müssen diese Koeffizienten ungleich Null nicht unbedingt bei denselben Indizes $i \in I$ auftreten). Die in der letzten Formel geschriebenen unendlichen Summen sind also tatsächlich endlich. Jetzt betrachten wir die endliche Menge $J \subset I$, welche die alle Indizes $i \in I$ enthält, so dass $\lambda_i \neq 0$ oder $\mu_i \neq 0$ gilt. Dann folgt aus der letzten Formel, dass

$$\sum_{i\in J} (\lambda_i - \mu_i) v_i = 0$$

gilt. Nach Voraussetzung ist die Familie $(v_i)_{i\in I}$ linear unabhängig, also gibt es nur die triviale Linearkombination des Nullvektors, und damit folgt $\lambda_i = \mu_i$ für alle $i \in J$, und damit auch für alle $i \in I$, da $\lambda_i = \mu_i = 0$ für alle $i \notin J$ gilt.

**„⇐“:** Da der Nullvektor natürlich ein Element von $\text{Span}_K\,((v_i)_{i\in I})$ ist, folgt aus der Voraussetzung (also der Tatsache, dass sich jeder Vektor eindeutig linear kombinieren lässt), direkt die definierende Aussage der linearen Unabhängigkeit der Familie $(v_i)_{i\in I}$.

□

Zum besseren Verständnis bringen wir noch eine weitere äquivalente Formulierung der linearen Unabhängigkeit bzw. Abhängigkeit.

**Lemma 4.11.** *Eine Familie $v_1, \ldots, v_r$ ist linear abhängig genau dann, wenn es ein $i \in \{1, \ldots, r\}$ gibt, so dass $v_i$ Linearkombination der anderen Vektoren $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_r$ ist.*

*Beweis.* Angenommen, $v_1, \ldots, v_r$ seien linear abhängig, dann gibt es $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$ mit $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r = 0$ und es gibt ein $i \in \{1, \ldots, r\}$, so dass $\lambda_i \neq 0$ ist. Dann folgt $-\lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{i_1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \lambda_n v_n$, also

$$v_i = -\frac{1}{\lambda_i} \cdot (\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{i_1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \lambda_n v_n)\,. = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} \cdot v_1 \ldots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} \cdot v_{i-1} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} \cdot v_{i+1} + \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda_i} \cdot v_n.$$

Nehmen wir andererseits an, dass es eine Linearkombination

$$v_i = \sum_{j\neq i} \mu_j v_j$$

gibt, dann folgt sofort

$$0 = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_{i-1} v_{i-1} + (-1) v_i + \mu_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \mu_n v_n,$$

und daher ist die Familie $(v_1, \ldots, v_r)$ linear abhängig. □

## 4.2 Basen und Dimensionen

Wenn wir die im letzten Abschnitt eingeführten Begriffe des von einer Familie aufgespannten Vektorraums und des der linearen Unabhängigkeit zusammenführen, kommen wir zum zentralen Konzept der Basis eines Vektorraums. Dies erlaubt uns, ein Maß für die Größe eines Vektorraums, genannt Dimension, zu finden. Das Material dieses Abschnitts ist absolut zentral in der Theorie der Vektorräume und für das weitere Verständnis der Vorlesung unverzichtbar (wie natürlich auch alles andere, was wir bis jetzt behandelt haben).
Wir beginnen gleich mit der wichtigsten Definition.

**Definition 4.12.** *Sei $V$ ein Vektorraum, und $(v_i)_{i\in I}$ eine Familie von Elementen aus $V$.*

1. *Diese Familie heißt* Erzeugendensystem *von $V$, falls gilt:*

$$Span\ ((v_i)_{i\in I}) = V.$$

2. *Falls die Familie $(v_i)_{i\in I}$ ein Erzeugendensystem und zusätzlich linear unabhängig ist, so heißt sie eine* Basis *des Vektorraums $V$.*

3. *Der Vektorraum $V$ heißt* endlich erzeugt*, falls es ein endliches Erzeugendensystem gibt, d.h., eine Familie $(v_1, \ldots, v_n)$ mit $V = Span\,(v_1, \ldots, v_n)$. Ist diese Familie außerdem linear unabhängig, d.h. eine Basis von $V$, dann heißt die Zahl $n$ die* Länge *der Basis $(v_1, \ldots, v_n)$.*

Zunächst diskutieren wir einige Beispiele:

1. Das einfachste und banalste Beispiel erhält man, wenn man als Familie die leere Menge betrachtet. Diese spannt nach Definition den Nullvektorraum $\{0\}$ auf, und ist offensichtlich linear unabhängig, also eine Basis diese Vektorraums.

2. Die Standardvektoren $e_1, \ldots, e_n$ (wobei $e_i = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 1)$), siehe Beispiel 3. auf Seite 64, bilden eine Basis den $K$-Vektorraums $K^n$.

3. Die Vektoren $(1, 0)$, $(0, 1)$ und $(1, 1)$ bilden ein Erzeugendensystem für den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$, aber keine Basis, da sie linear abhängig sind. Eine Basis erhält man, indem man den Vektor $(1, 1)$ weglässt.

4. Die komplexen Zahlen 1 und $i$ bilden eine Basis von $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum.

5. Die Familie $(x^i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ (bestehend aus allen Monomen in $x$) ist eine Basis des $K$-Vektorraumes $K[x]$. Diese Basis besteht aus unendlich vielen Elementen, und tatsächlich kann man beweisen (nicht in dieser Vorlesung), dass $K[x]$ nicht endlich erzeugt ist. Man beachte aber, dass jedes Element von $K[x]$, also jedes Polynom, eine *endliche* Linearkombination von Monomen, also von Elementen der Familie $(x^i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ ist.

Um die Theorie weiter entwicklen zu können, müssen wir zunächst einige äquivalente Definition des Basisbegriffes studieren.

**Satz 4.13.** *Sei $V$ ein Vektorraum und $\mathcal{B} := (v_1, \ldots, v_n)$ eine Familie von Elementen von $V$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent.*

1. *$\mathcal{B}$ ist eine Basis von $V$.*

2. *$\mathcal{B}$ ist ein Erzeugendensystem und kann nicht als Erzeugendensystem „verkürzt“ werden, d.h.: Für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ ist die Familie $(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n)$ kein Erzeugendensystem von $V$.*

3. *Für alle $v \in V$ existieren eindeutig bestimmte Elemente $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$, so dass*

$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots \lambda_n v_n$$

   *gilt*

4. *$\mathcal{B}$ ist linear unabhängig, kann aber als linear unabhängige Familie nicht „verlängert“ werden, d.h., für alle Vektoren $v \in V$ ist die Familie $(v_1, \ldots, v_n, v)$ linear abhängig.*

*Beweis.* Wir führen einen typischen „Ringschluss“ durch:

1. $\Rightarrow$ 2.**:** $\mathcal{B}$ ist nach Voraussetzung eine Basis und daher natürlich ein Erzeugendensystem. Sei $\mathcal{B}$ ein verkürzbares Erzeugendensystem, d.h., nehmen wir an, dass das verkürzte System (wir setzen o.B.d.A $i = 1$ an) $(v_2, \ldots, v_n)$ immer noch ein Erzeugendensystem von $V$ ist, d.h. insbesondere, dass gilt: Es gibt $\lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K$ mit

$$v_1 = \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$$

Dann schlussfolgern wir, dass $(-1)v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$ gilt, also ist die Familie $\mathcal{B}$ linear abhängig (Beachte: Wir haben gerade die Kontraposition $\neg 2.) \Rightarrow \neg 1.)$ gezeigt.

2. $\Rightarrow$ 3.**:** Zunächst folgt aus der Tatsache, dass $\mathcal{B}$ ein Erzeugendensystem ist, die Existenz von $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, so dass $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$ gilt. Nun nehmen wir wieder an, dass die in 3.) geforderte Eindeutigkeit nicht gilt, d.h., dass es ein $v \in V$ gibt, so dass

$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n,$$

und so, dass das Tupel $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ nicht gleich dem Tupel $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ ist, o.B.d.A. können wir dann $\lambda_1 \neq \mu_1$ annehmen. Da dann $\lambda_1 - \mu_1 \neq 0$ gilt, erhalten wir

$$v_1 = \frac{\mu_2 - \lambda_2}{\lambda_1 - \mu_1} v_2 + \ldots + \frac{\mu_n - \lambda_n}{\lambda_1 - \mu_1} v_n$$

und damit kann $\mathcal{B}$ verkürzt werden

3. $\Rightarrow$ 4.**:** Wegen Lemma 4.10 folgt aus 3. zunächst, dass $\mathcal{B}$ linear unabhängig ist. Wir müssen zeigen, dass $\mathcal{B}$ nicht „verlängert“ werden kann. Sei $v \in V$ gegeben. Dann folgt aus 3., dass

$$(-1)v + \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$$

ist, daher ist die „verlängerte“ Familie $(v, v_1, \ldots, v_n)$ linear abhängig.

4. $\Rightarrow$ 1.**:** Zu zeigen ist, dass unter der Voraussetzung 4. die linear unabhängige Familie $\mathcal{B}$ auch eine Basis ist. Sei ein Element $v \in V$ gegeben, dann folgt aus 4., dass $(v, v_1, \ldots, v_n)$ linear abhängig ist, d.h., es gibt $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ mit

$$\lambda_0 v + \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$$

Falls $\lambda_0 = 0$ gilt, dann folgt schon $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$, aber da $\mathcal{B}$ linear unabhängig war, gilt dann $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$. Dies ist aber ausgeschlossen, also haben wir $\lambda_0 \neq 0$, und dann bekommen wir

$$v = -\frac{1}{\lambda_0} (\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n)$$

so dass $v \in \text{Span}\,(v_1, \ldots, v_n)$. Dies gilt für alle $v \in V$, und daher ist $\mathcal{B}$ ein Erzeugendensystem und also eine Basis von V.

□

Wir erhalten die folgende einfache, aber sehr wichtige Konsequenz.

**Satz 4.14** (Basisauswahlsatz)**.** *Sei $\widetilde{\mathcal{B}} = (v_1, \ldots, v_n)$ ein endliches Erzeugendensystem eines Vektorraums $V$. Dann kann man aus $\widetilde{\mathcal{B}}$ eine Basis auswählen, d.h., $\widetilde{\mathcal{B}}$ lässt sich zu einer Basis $\mathcal{B}$ von $V$ verkürzen. Insbesondere folgt, dass jeder endlich erzeugte Vektorraum eine Basis bestehend aus endlich vielen Basisvektoren hat.*

*Beweis.* Wenn $\widetilde{\mathcal{B}}$ endlich ist, dann kann man es in endlich vielen Schritten verkürzen, bis es unverkürzbar geworden ist. Dann sagt aber der letzte Satz, dass solch ein unverkürzbares Erzeugendensystem schon eine Basis von $V$ sein muss. □

Es soll hier erwähnt werden, dass der folgende Satz, welcher ein viel allgemeinere Aussage macht, auch gibt.

**Satz 4.15.** *Jeder Vektorraum hat eine Basis.*

Der Beweis verwendet leider einige Aussage aus der Mengenlehre (das sogenannte *Zornsche Lemma*) welche wir aus Zeitgründen nicht behandeln wollen. Ausserdem werden wir uns in dieser Vorlesung auf endlichdimensionale Vektorräume konzentrieren, daher reicht uns Satz 4.14.
Andererseits haben wir auch die folgende Konsequenz.

**Korollar 4.16** (zu Satz 4.13)**.** *Falls der Vektorraum $V$ nicht endlich erzeugt ist, dann existiert eine linear unabhängige Familie mit unendlich vielen Elementen.*

*Beweis.* Wir zeigen folgende Aussage: Falls $V$ nicht endlich erzeugt ist, dann gibt es für jede linear unabhängige Familie $(v_1, \ldots, v_n)$, wobei $n \in \mathbb{N}$ beliebig ist, stets einen Vektor $v \in V$, so dass auch die verlängerte Familie $(v_1, \ldots, v_n, v)$ linear unabhängig ist. Diese Aussage beweisen wir indirekt: Angenommen, es gäbe eine linear unabhängige Familie $(v_1, \ldots, v_n)$, so dass für jedes $v$ die Familie $(v_1, \ldots, v_n, v)$ linear abhängig wäre, dann würde $v \in \text{Span}\,(v_1, \ldots, v_n)$ folgen, also wäre dann $(v_1, \ldots, v_n)$ schon ein Erzeugendensystem (und sogar eine Basis) von $V$. Dann wäre $V$ aber endlich erzeugt, was ein Widerspruch zur ursprünglichen Annahme ist. □

Unser nächstes Ziel ist es, die Länge einer (endlichen) Basis als Maß für die Größe eines (endlich erzeugten) Vektorraums zu erklären. Dabei entsteht natürlich das Problem, dass wir zunächst nicht wissen, ob verschiedene Basen die gleiche Länge haben. Dies untersuchen wir jetzt, indem wir studieren, was passiert, wenn man einzelne Vektoren in Basen austauscht.

**Lemma 4.17.** *Sei $V$ ein Vektorraum und $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von $V$. Sei ein weitere Vektor $v \in V \backslash \{0\}$ gegeben, d.h., es gibt eine eindeutig bestimmte Linearkombination*

$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n. \tag{4.1}$$

*Wähle ein $k \in \{1, \ldots, n\}$ mit $\lambda_k \neq 0$, dann ist auch die Familie*

$$\mathcal{B}' = (v_1, \ldots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, \ldots, v_n)$$

*eine Basis von $V$.*

*Beweis.* Wir können wieder ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $k = 1$ ist (falls nicht, numerieren wir die Vektoren $v_i$ um). Wir wollen also zeigen, dass die Familie $\mathcal{B}' = (v, v_2, \ldots, v_n)$ linear unabhängig und ein Erzeugendensystem von $V$ ist. Zuerst beweisen wir die zweite Aussage: Sei ein beliebiger Vektor $w \in V$ gegeben, dann existiert eine eindeutig bestimmte Linearkombination $w = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n$. Wir schreiben nun

$$v_1 = \frac{1}{\lambda_1}(v - \lambda_2 v_2 - \ldots - \lambda_n v_n),$$

dies ist wegen Gleichung (4.1) und der Tatsache, dass $\lambda_1 \neq 0$ ist, möglich. Einsetzen in $w = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n$ liefert

$$\begin{aligned} w &= \mu_1 \left(\tfrac{1}{\lambda_1}(v - \lambda_2 v_2 - \ldots - \lambda_n v_n)\right) + \mu_2 v_2 + \ldots + \mu_n v_n \\ &= \tfrac{\mu_1}{\lambda_1} v + \left(\mu_2 - \mu_1 \tfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) v_2 + \ldots + \left(\mu_n - \mu_1 \tfrac{\lambda_n}{\lambda_1}\right) v_n \end{aligned}$$

also wird $V$ von $\mathcal{B}'$ erzeugt. Nun zum Beweis der linearen Unabhängigkeit von $\mathcal{B}'$: Geben wir uns eine Linearkombination der Null vor:

$$\mu v + \mu_2 v_2 + \ldots + \mu_n v_n = 0$$

dann ist zu zeigen, dass $\mu = \mu_2 = \ldots = \mu_n = 0$ gilt. Wir setzten in diese Gleichung die Gleichung (4.1) ein und erhalten

$$\mu\lambda_1 v_1 + (\mu\lambda_2 + \mu_2) v_2 + \ldots + (\mu\lambda_n + \mu_n) v_n = 0$$

und weil $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis, also linear unabhängig ist, folgt $\mu\lambda_1 = 0$ sowie $\mu\lambda_2 + \mu_i = 0$ für alle $i \in \{2, \ldots, n\}$. Da wir aber $\lambda_1 \neq 0$ vorausgesetzt hatten, muss $\mu = 0$ sein, und dann folgt aus den anderen Gleichungen, dass auch $\mu_2 = \ldots = \mu_n = 0$ ist. Also ist $\mathcal{B}'$ linear unabhängig und damit eine Basis von $V$. □

Wichtig wird die folgende Konsequenz des Lemmas sein.

**Korollar 4.18** (Austauschsatz)**.** *Sei $V$ ein Vektorraum und $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von $V$. Sei weiterhin eine linear unabhängige Familie $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_m)$ gegeben. Dann gilt:*

1. *$m \leqslant n$,*
2. *Es gibt Indizes $i_1, \ldots, i_m$, so dass die Familie, welche durch Austausch von $v_{i_1}$ gegen $w_1$, von $v_{i_2}$ gegen $w_2$, ... und von $v_{i_m}$ gegen $w_m$ ensteht, wieder eine Basis von $V$ ist.*

Den zweiten Teil des Satzes kann man umformulieren, in dem man sagt: Numeriere die Indizierung der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ so um, dass $i_1 = 1, \ldots, i_m = m$ ist. Dann ist die Familie

$$\mathcal{B}' = (w_1, \ldots, w_m, v_{m+1}, \ldots, v_n)$$

wieder eine Basis von $V$.

*Beweis.* Wir führen einen Induktionsbeweis über die Zahl $m$. Falls $m = 0$ gilt, ist dann ist die Aussage klar, denn dann besteht die Familie $\mathcal{C}$ aus null Vektoren, und aus diesem kann man keine auswählen. Damit ist der Induktionsanfang erledigt. Wir wählen also ein festes $m \geqslant 1$, und nehmen an, dass die Aussage für $m - 1$ bewiesen ist. Wir müssen zeigen, dass sie dann auch für $m$ gilt. Nach Voraussetzung ist die Familie $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_m)$ linear unabhängig, dies gilt dann natürlich auch für die Familie $(w_1, \ldots, w_{m-1})$. Wir können also die Induktionsvoraussetzung auf die Basis $\mathcal{B}$ und diese linear unabhängige Familie anwenden, und erhalten, dass $m - 1 \leqslant n$ und dass (bei geeigneter Numerierung) die „ausgetauschte“ Familie

$$(w_1, \ldots, w_{m-1}, v_m, \ldots, v_n)$$

eine Basis ist. Wir müssen also zunächst den Fall $m - 1 = n$ ausschliessen (denn dann würde nicht mehr $m \leqslant n$ gelten). Falls $m - 1 = n$ ist, wäre die Familie $(w_1, \ldots, w_{m-1})$ nicht nur linear unabhängig, sondern schon eine Basis. Dann wäre sie aber wegen Satz 4.13 eine unverlängerbare linear unabhängige Familie, und das widerspricht der Tatsache, dass $(w_1, \ldots, w_{m-1}, w_m)$ immer noch linear unabhängig ist. Damit haben wir bewiesen, dass $m \leqslant n$ gilt. Nun kommen wir zur zweiten Aussage. Die Induktionsannahme ist, dass $(w_1, \ldots, w_{m-1}, v_m, \ldots, v_n)$ eine Basis ist, und wir müssen zeigen, dass dies auch für $(w_1, \ldots, w_m, v_{m+1}, \ldots, v_n)$ gilt. Wir haben eine Linearkombination

$$w_m = \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_{m-1} w_{m-1} + \lambda_m v_m + \ldots + \lambda_n v_n$$

Jetzt ist klar, dass in dieser Gleichung nicht gelten kann $\lambda_m = \lambda_{m+1} = \ldots = \lambda_n = 0$, denn dann hätten wir $w_m \in \operatorname{Span}(w_1, \ldots, w_{m-1})$, und das geht nicht, da $(w_1, \ldots, w_m)$ als linear unabhängig angenommen wurde. Durch erneutes Umnummerieren der Vektoren $v_m, \ldots, v_n$ können wir also annehmen, dass $\lambda_m \neq 0$ gilt, und dann folgt aus Lemma 4.17, dass auch die Familie $(w_1, \ldots, w_m, v_{m+1}, \ldots, v_n)$ eine Basis ist. □

Als Konsequenz bekommen wir, dass die Länge einer Basis nicht von der Auswahl der Basis abhängt, und daher ein geeignetes Maß für die Größe eines Vektorraumes ist.

**Korollar 4.19.** *1. Falls $V$ endlich erzeugt ist, dann hat jede Basis von $V$ endliche Länge.*

2. *Je zwei endliche Basen von $V$ haben die gleiche Länge.*

*Beweis.* 1. Aus dem Basisauswahlsatz (Satz 4.14) folgt zunächst, dass es eine endliche Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von $V$ gibt. Sei nun $(w_i)_{i \in I}$ eine beliebige Basis. Falls die Indexmenge $I$ unendlich ist, dann enthält die Basis $(w_i)_{i \in I}$ linear unabhängige Teilfamilien beliebiger Länge, genauer, es gäbe Indizes $i_1, \ldots, i_{n+1}$, so dass $w_{i_1}, \ldots, w_{i_{n+1}}$ linear unabhängig wären. Dies widerspricht der ersten Aussage des Austauschsatzes (Korollar 4.18).

2. Seien zwei Basen $(v_1, \ldots, v_n)$ und $(w_1, \ldots, w_m)$ gegeben. Dann folgt durch zweimaliges Anwenden des Austauschsatzes, dass $m \leqslant n$ und $n \leqslant m$ gilt.

□

Nun kommen wir zur wichtigsten Definition dieses Abschnitts, für die alle bisherigen Vorarbeiten notwendig waren.

**Definition 4.20.** *Sei $V$ ein $K$-Vektorraum, dann definieren wir*

$$\dim_K(V) := \begin{cases} \infty, & \text{falls } V \text{ keine eindliche Basis besitzt} \\ n, & \text{falls es eine Basis von } V \text{ der Länge } n \text{ gibt.} \end{cases}$$

*Wir nennen* $\dim_K(V)$ *die* Dimension *von $V$ über $K$, häufig schreibt man auch* $\dim(V)$*, falls klar ist, über welchem Körper man den Vektorraum $V$ betrachtet.*

Man beachte, dass die Definition der Dimension nur wegen dem letzten Korollar Sinn macht: Wenn man nicht wüsste, dass die Längen zweier (endlicher) Basen immmer gleich sind, könnte man die Dimension eines Vektorraums (d.h., eine nur von diesem Vektorraum abhängende Eigenschaft) nicht mit Hilfe einer gewählten Basis definieren, denn eine andere Basis könnte eventuell eine andere Länge haben.
In vielen Beweisen in der Linearen Algebra wird das folgende Argument verwendet.

**Korollar 4.21.** *Sei $W \subset V$ ein Untervektorraum und sei $V$ endlich erzeugt. Dann ist auch $W$ endlich erzeugt, hat also endliche Basen und es gilt* $\dim(W) \leqslant \dim(V)$*. Falls die Gleichheit* $\dim(W) = \dim(V)$ *gilt, dann folgt $W = V$.*

*Beweis.* Angenommen, $W$ wäre nicht endlich erzeugt. Dann folgt aus Korollar 4.16, dass eine unendlich lange linear unabhängige Familie in $W$ existiert. Weil $W$ ein Untervektorraum von $V$ ist, ist dies natürlich auch eine (unendlich lange) linear unabhängige Familie in $V$, welche endlich linear unabhängige Familien beliebiger Länge enthält. Dies widerspricht dem Austauschsatz (also Korollar 4.18), welcher insbesondere besagt, daß jede linear unabhängige Familie in $V$ höchstens $\dim(V)$ viele Elemente haben kann. Also ist $W$ endlich erzeugt, und hat eine endliche Basis. Diese ist eine linear unabhängige Familie in $V$, und der Austauschsatz liefert dann, dass ihre Länge kleiner oder gleich der der Länge einer Basis von $V$ ist, d.h., $\dim(W) \leqslant \dim(V)$.
Für die zweite Aussage sei nun $\dim(W) = \dim(V) = n$, und sei $w_1, \ldots, w_n$ eine Basis von $W$. Falls $W \subsetneq V$ gilt, dann existiert ein $v \in V \backslash W$, und wegen $v \notin \operatorname{Span}(w_1, \ldots, w_n) = W$ muss die Familie $w_1, \ldots, w_n, v$ linear unabhängig sein, dies widerspricht wieder dem Austauschsatz, wenn man diesen auf eine Basis von $V$ und diese Familie anwendet. Also ist $W = V$. □

Wir diskutieren einige Beispiel zum Dimensionsbegriff:

1. Der Nullvektorraum $\{0\}$ (über einem beliebigen) Körper $K$ hat Dimension 0, denn eie Basis wird durch die leere Familie gegeben, und diese hat Länge Null.

2. $\dim_K(K^n) = n$, denn die Vektoren $e_1, \ldots, e_n$ (siehe Seite 64) sind eine Basis von $K^n$.

3. Eine Gerade durch den Ursprung in $\mathbb{R}^n$ (also eine Menge der Form $\{\lambda \cdot v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ für ein $v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, ist ein eindimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$, analog ist eine Ebene durch den Ursprung ein zweidimensionaler Untervektorraum (falls $n \geqslant 2$ ist).

4. Es ist $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$, wobei die einelementige Familie $(z)$, mit $z \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ beliebig, eine Basis ist.

5. Es ist $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$, eine Basis ist zum Beispiel durch $(1, i)$ gegeben.

6. Es ist $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) = \infty$, dies folgt aus der Tatsache, dass $\mathbb{Q}$ abzählbar aber $\mathbb{R}$ überabzählbar ist (siehe Definition 2.15 und die Diskussion danach).

7. Für jeden Körper $K$ ist $\dim_K K[t] = \infty$, denn für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Familie $(1, t, t^2, \ldots, t^n)$ linear unabhängig, also kann $K[t]$ nicht endlich-dimensional sein.

Wir haben im Basisauswahlsatz (Satz 4.14) gesehen, dass man aus (endlichen) Erzeugendensystemen Elemente weglassen kann, um eine Basis zu erhalten. Der folgende Satz behandelt die umgekehrte Prozedur.

**Satz 4.22** (Basisergänzungssatz)**.** *Sei $V$ endlich erzeugt, und seien linear unabhängige Vektoren $v_1, \ldots, v_k$ gegeben. Dann existieren Vektoren $v_{k+1}, \ldots, v_n$, so dass die Familie $(v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n)$ eine Basis von $V$ ist.*

*Beweis.* Da $V$ endlich erzeugt ist, existiert ein Erzeugendensystem $(w_1, \ldots, w_m)$, aus dem wir gemäß Satz 4.14 eine Basis $(w_1, \ldots, w_n)$ auswählen können (eventuell nach Umnummerierung), dann ist $n \leqslant m$. Nun wenden wir den Austauschsatz (Korollar 4.18) auf diese Basis und die gegebene Familie $(v_1, \ldots, v_k)$ an. Dann erhalten wir (gegebenenfalls nach erneuter Umnummerierung) eine Basis $(v_1, \ldots, v_k, w_{k+1}, \ldots, w_n)$, und dann setzen wir einfach $v_i := w_i$ für alle $i \in \{k+1, \ldots, n\}$, und haben damit unsere Basisergänzung gefunden. □

Natürlich müssen wir in vielen Beispielen für einen gegebenen Vektorraum eine Basis ausrechnen. Dies geht theoretisch mit dem Basisauswahlsatz (Satz 4.14), aber praktisch ist dies schwer durchführbar. Viel einfacher ist es, aus einem gegebenen Erzeugendensystem eine Basis zu kombinieren, bei der die Basisvektoren aber eben nicht unbedingt ein Teil des gegebenen Systems sind. Dies wollen wir jetzt behandeln, und zwar nur für den Fall $V = K^n$. Sei also eine linear unabhängige Familie $a_1, \ldots, a_m \in K^n$ gegeben, und betrachte $W := \operatorname{Span}(a_1, \ldots, a_m)$. Dann ist das Ziel, eine Basis von $W$ zu konstruieren. Wir können die Vektoren $a_i \in K^n$ als Zeilenvektoren auffassen, und untereinander in eine Matrix schreiben. Hierzu wollen wir zunächst den im ersten Kapitel verwendeten Matrizenbegriff präzisieren und erweitern, indem wir Einträgen aus einem beliebigen Körper zulassen.

**Definition 4.23.** *Sei $K$ ein Körper und seien $n, m \in \mathbb{N}$. Dann ist*

$$M(m \times n, K) := \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in K \right\}$$

*die Menge der $n \times m$-Matrizen (d.h., der Matrizen mit $m$ Zeilen und $n$ Spalten) mit Einträgen aus $K$. Gelegentlich schreiben wir eine $m \times n$-Matrix als*

$$(a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$$

*oder kürzer als $(a_{ij})$, wenn klar ist, was die Größe der Matrix ist.*

Zunächst beweisen wir das folgende einfach Lemma.

**Lemma 4.24.** *Die Menge $M(m \times n, K)$ ist ein $K$-Vektorraum der Dimension $m \cdot n$.*

*Beweis.* Zunächst müssen wir eine Addition und eine Skalarmultiplikation auf $\mathrm{M}(m \times n, K)$ definieren. Wir setzen für $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathrm{M}(m \times n, K)$ und $\lambda \in K$:

$$\begin{aligned} A + B &:= (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} \\ \lambda \cdot A &:= (\lambda \cdot a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} \end{aligned}$$

Dann prüft man ohne Schwierigkeiten die Vektorraumaxiome nach.

Die Aussage über die Dimension folgt sofort aus der Tatsache, dass die sogenannten *Elementarmatrizen*

$$E_{ij} := \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

bei denen alle Einträge Null sind ausser dem in der $i$-ten Zeile und der $j$-ten Spalte, welcher gleich 1 ist, eine Basis von $\mathrm{M}(m \times n, K)$ bilden. Auch dies rechnet man mit Hilfer der Definition eines Erzeugendensystems und der linearen Unabhängigkeit sofort nach. □

Man sieht, dass die Zeilenvektoren $a_1, \dots, a_m \in K^n$ untereinander geschrieben eine $m \times n$-Matrix $A$, also ein Element $A \in \mathrm{M}(m \times n, K)$ ergeben. Beispielweise liefert die Basis $(e_1, \dots, e_n)$, bestehend aus den Einheitsvektoren, die sogenannte Einheitsmatrix

$$E_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(n \times n, K),$$

bei der auf der Diagonalen Einsen stehen und alle anderen Einträge gleich Null sind. Um nun aus dem gegebenen Erzeugendensystem $a_1, \dots, a_m$ eine Basis zu konstruieren, benutzen wir Zeilenumformungen der Matrix $A$. Wir betrachten die folgenden 4 Typen:

**I** Multiplikation der $i$-ten Zeile mit einem Element $\lambda \in K \backslash \{0\}$, d.h.:

$$A = \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix} \longmapsto A'_I := \begin{pmatrix} \vdots \\ \lambda \cdot a_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

**II** Addition der $i$-ten zur $j$-ten Zeile, d.h.:

$$A = \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} \longmapsto A'_{II} := \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_i + a_j \\ \vdots \end{pmatrix}$$

**III** Addition des $\lambda$-fachen der $i$-ten zur $j$-ten Zeile ($\lambda \in K \backslash \{0\}$), d.h.:

$$A = \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} \longmapsto A'_{III} := \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ \lambda \cdot a_i + a_j \\ \vdots \end{pmatrix}$$

**IV** Vertauschen der $i$-ten und der $j$-ten Zeile:

$$A = \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} \longmapsto A'_{IV} := \begin{pmatrix} \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

hierbei soll bei II-IV immer $i \neq j$ gelten.
**Bemerkung:** Die Operationen III und IV sind genau die Zeilenumformungen, welche wir bereits in Kapitel 1 betrachtet hatten. Man bemerke auch, dass sich natürlich die Operationen III und IV durch die Operationen I und II ausdrücken lassen, also brauchen wir eine Aussage über die Zeilenumformungen I-IV immer nur an den Umformungen I und II nachzuprüfen.
Zur Vereinfachung der Darstellung führen wir folgenden Begriff ein.

**Definition 4.25.** *Seien wie oben $a_1, \ldots, a_m \in K^n$ und $A$ die aus diesen Zeilenvektoren bestehende Matrix in $M(m \times n, K)$. Dann heißt*

$$ZR(A) := Span\,(a_1, \ldots, a_m)$$

*der Zeilenraum von $A$, natürlich ist $ZR(A)$ ein Untervektorraum von $K^n$.*

Der wichtige Punkt ist nun die folgende Aussage.

**Lemma 4.26.** *Sei $A \in M(m \times n, K)$, und es entstehe $B \in M(m \times n, K)$ aus $A$ durch eine Zeilenumformung vom Typ I-IV. Dann gilt*

$$ZR(A) = ZR(B)$$

*Beweis.* Wie eben erwähnt, reicht es, Umformungen vom Typ I und II zu betrachten. Sei also ein Vektor $v \in \mathrm{ZR}(A)$ gegeben, dann gilt $v = \sum_{j=1}^{m} \mu_i a_j$ für gewisse $\mu_j \in K$. Falls jetzt $B = A'_I$ ist, dann ist aber auch $v = \mu_1 a_1 + \ldots + \mu_i/\lambda \cdot (\lambda a_i) + \ldots + \mu_m a_m$, also folgt $v \in \mathrm{ZR}(A'_I)$. Analog folgt aus $v \in \mathrm{ZR}(A'_I)$, dass $v \in \mathrm{ZR}(A)$ gilt. Falls nun $B = A'_{II}$ gilt, dann folgt aus $v = \sum_{k=1}^{m} \mu_k a_k$, dass

$$v = \mu_1 a_1 + \ldots + (\mu_i - \mu_j) a_i + \ldots + \mu_j (a_i + a_j) + \ldots + \mu_m a_m$$

gilt, also $v \in \mathrm{ZR}(A'_{II})$, und die umgekehrte Inklusion beweist man wieder analog. □

Aus der schon erwähnten Tatsache, dass sich die Zeilenumformungen III und IV durch I und II beschreiben lassen, folgt, dass ganz analog zu Satz 1.3 gilt:

**Lemma 4.27.** *Jedes Element $A \in M(m \times n, K)$ lässt sich durch (endlich viele) Zeilenumformungen vom Typ I und II auf Zeilenstufenform bringen.*

Damit ist das Verfahren zum Berechnen einer Basis von $W = \mathrm{Span}\,(a_1, \ldots, a_m)$ klar: Man bringt die aus diesen Zeilen konstruierte Matrix $A \in \mathrm{M}(m \times n, K)$ auf Zeilenstufenform $B$, es gilt dann $\mathrm{ZR}(A) = \mathrm{ZR}(B)$, und die von Null verschiedenen Zeilen von $B$ sind eine Basis von $W$. Zur Illustration soll das folgende Beispiel dienen: Sei $K = \mathbb{R}$ und seien die Vektoren $a_1 = (1, 0, 2, 1)$, $a_2 = (3, 1, 2, 2)$ und $a_3 = (2, 2, -4, 0)$ in $\mathbb{R}^4$ gegeben. Gesucht ist eine Basis von $W = \mathrm{Span}\,(a_1, a_2, a_3)$. Dann ist die daraus konstruierte Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir führen Zeilenumformungen durch

$$A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & -8 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit ist $((1,0,2,1),(0,1,-4,-1))$ eine Basis von $W$ und es gilt $\dim_{\mathbb{R}}(W) = 2$.
**Bemerkung:** Wir haben bis jetzt Vektoren meistens als Zeilenvektoren geschrieben. Dies war zunächst willkürlich, wenn man Vektoren als Spaltenvektoren schreibt, dann würde man das eben beschriebene Verfahren so durchführen, dass man ein Erzeugendensystem $(a_1, \ldots, a_n)$ eines Untervektorraumes $W$, welcher diesmal in $K^m$ liegt, *hintereinander* schreibt, und damit wieder eine $m \times n$-Matrix erhält. Dann definiert man analog den Spaltenraum als $\mathrm{SR}(A) := \mathrm{Span}_K(a_1, \ldots, a_n)$, und führt zur Bestimmung einer Basis *Spaltenumformungen* durch. Man kann sich auch das Einführen dieser neuen Begriffe sparen, in dem man die folgende Operation auf der Menge der Matrizen definiert.

**Definition-Lemma 4.28.** *Sei $A = (a_{ij}) \in M(m \times n, K)$, dann definieren wir die Matrix ${}^tA := (a'_{ji}) \in M(n \times m, K)$ durch $a'_{ji} := a_{ij}$. ${}^tA$ heißt die transponierte Matrix von $A$. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{array}{ccc} M(m \times n, K) & \longrightarrow & M(n \times m, K) \\ A & \longmapsto & {}^tA \end{array}$$

*bijektiv. Außerdem gelten die folgende Rechenregeln:*

1. ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$,
2. ${}^t(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot {}^tA$,
3. ${}^t({}^tA) = A$.

Durch Transponieren kann man Spaltenumformungen einfach als Zeilenumformungen der transponierten Matrix erklären, und es ist klar, dass man mit dem oben beschriebenen Verfahren (unter Verwendung von Transponieren) auch eine Basis des Spaltenraums einer Matrix bestimmen kann. Die folgende wichtige Tatsache soll hier noch erwähnt werden, ein Beweis wird auf das nächste Kapitel verschoben (siehe Lemma5.32).

**Definition-Lemma 4.29.** *Sei $A \in M(m \times n, K)$ gegeben. Sei $A = (\tilde{a}_1 | \ldots | \tilde{a}_n)$, d.h., $\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n$ sind die Spalten der Matrix. Wenn wir $K^m$ als Vektorraum der Spaltenvektoren auffassen, dann sei*

$$SR(A) := \mathit{Span}_K(\tilde{a}_1 | \ldots | \tilde{a}_n)$$

*der Spaltenraum von $A$. Sei weiterhin*

$$\begin{array}{c} \mathit{Zeilenrang}(A) := \dim_K(ZR(A)) \\ \mathit{Spaltenrang}(A) := \dim_K(SR(A)) \end{array}$$

*Dann gilt*

$$\mathit{Zeilenrang}(A) = \mathit{Spaltenrang}(A)$$

*und diese Zahl wird einheitlich als Rang der Matrix $A$, geschrieben $\mathit{Rang}(A)$ oder auch $rk(A)$ bezeichnet.*

In vielen Anwendungen der linearen Algebra treten Summen von Vektorräumen auf, und man muss deren Dimension berechnen. Das wollen wir nun behandeln.

**Definition 4.30.** *Sei ein Vektorraum $V$ sowie Untervektorräume $V_1, \ldots, V_k$ gegeben. Dann definiert man*

$$V_1 + \ldots + V_k := \{v_1 + \ldots + v_k \,|\, v_i \in V_i\}$$

*als die Summe von $V_1, \ldots, V_k$.*

Klar ist sofort, dass $V_1 + \ldots + V_k$ auch ein Untervektorraum von $V$ ist, ausserdem handelt es sich um den von $V_1 \cup \ldots \cup V_k$ aufgespannten Raum. Da die Vereinigung von Basen der Untervektorräume $V_i$ natürlich ein Erzeugendensystem von $V_1 + \ldots + V_k$ ist, folgt auch

$$\dim(V_1 + \ldots + V_k) \leqslant \dim(V_1) + \ldots + \dim(V_k).$$

Natürlich gilt im Allgemeinen keine Gleichheit, denn das eben erwähnte Erzeugendensystem ist im Allgemeinen eben keine Basis. Genauer haben wir im Fall $k = 2$ die folgende Aussage.

**Satz 4.31** (Dimensionsformel)**.** *Seien $V_1, V_2$ endlichdimensionale Untervektorräume eines Vektorraums $V$, dann gilt*

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2).$$

Um diesen Satz zu veranschaulichen, denke man an $V = \mathbb{R}^3$, und für $V_1$ und $V_2$ an zwei sich schneidende Ebenen (natürlich durch den Ursprung). Diese haben beide Dimension 2, und der Schnitt ist eine Gerade, also ein eindimensionaler Untervektorraum. Man überlegt sich leicht, dass $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^3$ gelten muss, also stimmt die Formel in diesem Fall.

*Beweis.* Sei $v_1, \ldots, v_m$ eine Basis von $V_1 \cap V_2$. Der Basisergänzungssatz (Satz 4.22) besagt, dass wir diese Basis zu Basen $(v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_k)$ von $V_1$ und $(v_1, \ldots, v_m, w'_1, \ldots, w'_l)$ von $V_2$ ergänzen können. Wir behaupten, dass dann

$$\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_k, w'_1, \ldots, w'_l)$$

eine Basis von $V$ ist, und dann ist die Formel $\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2)$ offensichtlich bewiesen. Es ist klar, dass $\mathcal{B}$ ein Erzeugendensystem von $V_1 + V_2$ ist, denn jeder Vektor $v_1 + v_2$ mit $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$ kann aus den Elementen von $\mathcal{B}$ kombiniert werden. Wir haben die lineare Unabhängigkeit der Familie $\mathcal{B}$ zu beweisen. Angenommen, es würde

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_k w_k + \mu'_1 w'_1 + \ldots + \mu'_l w'_l = 0 \tag{4.2}$$

gelten. Wir betrachten den Vektor

$$v := \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_k w_k. \tag{4.3}$$

Offensichtlich ist $v \in V_1$, aber es gilt auch $v = -(\mu'_1 w'_1 + \ldots + \mu'_l w'_l)$ und daher $v \in V_2$. Also ist $v \in V_1 \cap V_2$, kann also linear aus $v_1, \ldots, v_m$ kombiniert werden, d.h., es gibt $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_m \in K$ mit

$$v = \lambda'_1 v_1 + \ldots + \lambda'_m v_m \tag{4.4}$$

Jetzt haben wir zwei Linearkombinationen des Vektors $v$ in der Basis $v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_k$ des Vektorraums $V_1$, nämlich die Darstellungen (4.3) und (4.4). Wegen der Eindeutigkeit einer solchen Darstellung bezüglich einer Basis folgt also $\lambda_1 = \lambda'_1, \ldots, \lambda_m = \lambda'_m$ und $\mu_1 = \ldots = \mu_k = 0$. Dann schreibt sich aber die Gleichung (4.2) als

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + \mu'_1 w'_1 + \ldots + \mu'_l w'_l = 0,$$

aber da $(v_1, \ldots, v_m, w'_1, \ldots, w'_l)$ eine Basis von $V_2$ ist, folgt hieraus, dass $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = \mu'_1 = \ldots = \mu'_l = 0$ gilt. □

Der Spezialfall des obigen Satzes, in welchem $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ ist, hat eine besondere Bedeutung. Wir besprechen zunächst verschiedene Charakterisierungen dieses Falles.

**Definition-Lemma 4.32.** *Sei $V$ ein Vektorraum und $V_1, V_2 \subset V$ Untervektorräume mit $V = V_1 + V_2$.*

1. *Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*
   - *(a) $V_1 \cap V_2 = \{0\}$,*
   - *(b) Für alle $v \in V$ gibt es eine eindeutige Darstellung $v = v_1 + v_2$ mit $v_i \in V_i$, $i = 1, 2$,*

*(c) Seien $v_1 \in V_1 \backslash \{0\}$, $v_2 \in V_2 \backslash \{0\}$, dann sind $v_1$ und $v_2$ linear unabhängig.*

*Falls eine dieser Bedingungen erfüllt ist, dann sagt, man, dass $V$* direkte *Summe von $V_1$ und $V_2$ ist, und schreibt $V = V_1 \oplus V_2$.*

2. *Sei nun $V$ endlichdimensional und $V = V_1 + V_2$. Dann sind äquivalent:*

   *(a) $V = V_1 \oplus V_2$.*

   *(b) Es gibt Basen $v_1, \ldots, v_k$ von $V_1$ und $v_1', \ldots, v_l'$ von $V_2$, so dass $v_1, \ldots, v_k, v_1', \ldots, v_l$ eine Basis von $V$ ist.*

   *(c) $\dim(V) = \dim(V_1) + \dim(V_2)$.*

*Beweis.* 1. Wir verwenden wieder einen Ringschluss.

**(a)⇒(b)** Da $V = V_1 + V_2$ gilt, existiert eine Darstellung $v = v_1 + v_2$ mit $v_i \in V_i, i = 1, 2$. Angenommen, es gäbe eine zweite Darstellung $v = v_1' + v_2'$ mit $v_i' \in V_i$, dann folgt $v_1 - v_1' = v_2' - v_2$, aber natürlich ist $v_1 - v_1' \in V_1$ und $v_2' - v_2 \in V_2$, also gilt wegen $V_1 \cap V_2 = \{0\}$, dass $v_1 - v_1' = v_2' - v_2 = 0$ ist, d.h., $v_1 = v_1'$ und $v_2 = v_2'$.

**(b)⇒(c)** Angenommen, es würde $\lambda v_1 + \mu v_2 = 0$ gelten. Da aber natürlich immer $0 = 0 + 0$ gilt, und da die Darstellung jedes Vektors aus $V$ als Summe von Vektoren in $V_1$ und $V_2$ als eindeutig vorausgesetzt ist, muss $\lambda v_1 = \mu v_2 = 0$ sein, aber wegen $v_1 \neq 0$ und $v_2 \neq 0$ folgt dann $\lambda = \mu = 0$, d.h., $v_1$ und $v_2$ sind linear unabhängig.

**(c)⇒(a)** Angenommen, es gäbe ein $v \neq 0$ mit $v \in V_1 \cap V_2$. Dann folgt $v + (-1) \cdot v = 0$, aber dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung (c), denn dann hätte man $v \in V_1$ und $(-1)v \in V_2$, welche nicht linear unabhängig sind.

2. Wenn man den Satz 4.31 und seinen Beweis für den Fall $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ betrachtet, erhält man sofort die Implikationen (a)⇒(b) sowie (b)⇒(c). Zu zeigen ist noch, dass aus (c) auch (a) folgt: Wir setzen wieder die Dimensionsformel $\dim(V) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2)$ an, und erhalten, dass $\dim(V_1 \cap V_2) = 0$ ist, woraus sofort $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ folgt, und der gerade bewiesene erste Teil des Lemmas liefert dann $V = V_1 \oplus V_2$.

□

Zum Abschluss erweitern wir den Begriff der direkten Summe noch auf mehrere Untervektorräume.

**Definition 4.33.** *Sei $V$ Vektorraum und $V_1, \ldots, V_k \subset V$ Untervektorräume. Dann heißt $V$ direkte Summe von $V_1, \ldots, V_k$, geschrieben $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$, falls gilt:*

1. *$V = V_1 + \ldots + V_k$,*
2. *Falls $v_i \in V_i$ mit $i = 1, \ldots, k$ gegeben sind, so dass $v_1 + \ldots + v_k = 0$ gilt, dann folgt $v_1 = \ldots = v_k = 0$.*

Als Übung überlegen Sie sich bitte, dass diese Bedingung für $k = 2$ zu den oben genannten äquivalent ist, dass ihr zweiter Teil für $k > 2$ aber nicht durch $W_1 \cap \ldots \cap W_k = \{0\}$ oder auch $W_i \cap W_j = \{0\}$ für $i \neq j$ ersetzt werden kann.

# Kapitel 5

# Lineare Abbildungen

In diesem Kapitel behandeln wir einen ganz zentralen Teil der linearen Algebra, nämlich Abbildungen zwischen Vektorräumen, welche die Struktur dieser Vektorräume (also die Addition und die Skalarmultiplikation) erhalten. Wir werden sehen, dass Matrizen immer solche Abbildungen liefern, und dass andererseits jede solche Abbildung durch eine Matrix dargestellt werden kann, wenn man gewisse Wahlen trifft. Dies wird es uns zum Beispiel erlauben, das im ersten Kapitel dargestellt Verfahren zum Lösen von linearen Gleichungssystemen noch einmal „richtig“ (d.h., von einem etwas abstrakteren Standpunkt aus) zu behandeln.

## 5.1 Definitionen und erste Beispiele

Wir definieren eine lineare Abbildung zwischen Vektorräumen analog zu Gruppenhomomorphismen.

**Definition 5.1.** *Seien $V$ und $W$ Vektorräume über einem Körper $K$. Sei eine Abbildung $F : V \to W$ gegeben. Dann nennt man diese eine* linear Abbildung *(manchmal auch genauer eine $K$-lineare Abbildung), oder auch einen Vektorraumhomomorphismus, falls gilt*

**L1** *Für alle $v, w \in V$ gilt $F(v + w) = F(v) + F(w)$.*

**L2** *Für alle $\lambda \in K$ und für alle $v \in V$ gilt $F(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot F(v)$.*

*Falls $F$ linear und darüber hinaus noch bijektiv ist, so heißt $F$ ein (Vektorraum)isomorphismus, falls $V = W$ gilt, so heißt $F$ ein (Vektorraum)endomorphismus und falls sowohl $V = W$ gilt als auch $F$ bijektiv ist, so heißt $F$ ein (Vektorraum)automorphismus.*
*Die Menge aller linearen Abbildungen bzw. Vektorraumhomomorphismen zwischen $V$ und $W$ bezeichnet man mit $Hom_K(V, W)$.*

Man sieht ganz einfach, dass sich die beiden Bedingungen L1 und L2 äquivalent sind zu der folgenden einen Bedingung: Für alle $\lambda, \mu \in K$ und alle $v, w \in V$ gilt, dass $F(\lambda v + \mu w) = \lambda F(v) + \mu F(w)$ ist.
Wir diskutieren zunächst einige ganz offensichtliche Beispiele, um die Definition besser zu verstehen.

1. Seien $V = W = \mathbb{R}$ (gesehen als Vektorraum über $\mathbb{R}$, also über sich selbst), und sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $F(x) = a \cdot x$ für ein $a \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann ist $F$ linear. Ist hingegen $F(x) = ax + b$, mit $b \neq 0$ (so etwas wird in der Schule oder auch manchmal in der Analysis als eine lineare Funktion bezeichnet), dann ist es keine lineare Abbildung von $\mathbb{R}$ nach sich selbst, denn es gilt für $v = w = 1$, dass $F(2) = 2a + b \neq F(1) + F(1) = 2a + 2b$.

2. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ die Menge der differenzierbaren Funktionen auf $I$. Dann ist $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ ein (unendlichdimensionaler) $\mathbb{R}$-Vektorraum, und die Ableitung $D : \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$, $f \mapsto f'$ ist linear, denn es gilt natürlich $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$.

3. Analog zum letzten Beispiel sei nun $I = [a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall und $V = \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ die Menge der stetigen Funktionen auf $I$. Natürlich ist dies auch ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, mit $\dim_{\mathbb{R}}(V) = \infty$. Wir betrachten die Abbildung $S : V \to \mathbb{R}$, gegeben durch $S(f) := \int_a^b f(x)dx$, und man sieht aus den Regeln für Integration, dass wieder $S(f + g) = S(f) + S(g)$ und $S(\lambda f) = \lambda S(f)$ gilt, also ist die Abbildung $S$ linear, also ein Vektorraumhomomorphismus von $V$ nach $\mathbb{R}$.

4. Betrachte den Vektorraum $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Wir fixieren eine beliebige Abbildung $\phi \in V$ (diese braucht nicht in irgendeinem Sinne linear zu sein, z.B. $\phi(x) = x^2$). Dann ist die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} L_\phi : V & \longrightarrow & V \\ f & \longmapsto & f \circ \phi \end{array}$$

linear (Übung), also ein Vektorraumendomorphismus. Dieses Beispiel zeigt, dass es manchmal sogar für nicht-lineare Objekte (wie die Funktion $x \mapsto x^2$ sinnvoll ist, lineare Abbildungen zu betrachten.

Für das erste Beispiel gibt es eine Verallgemeinerung, welche von zentraler Bedeutung in der linearen Algebra ist. Sei eine Matrix $A \in \mathrm{M}(m \times n, K)$ gegeben. Wir betrachten die $K$-Vektorräume $K^n$ und $K^m$ und definieren die Abbildung

$$F_A : K^n \longrightarrow K^m$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto A \cdot x = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

Das Produkt der Matrix $A$ mit dem Spaltenvektor $x$ hatten bereits in Kapitel 1 benutzt (siehe Formel (1.1)). Der Beweis der folgenden Aussage ist eine leichte Übungsaufgabe.

**Lemma 5.2.** *Die durch Formel* (5.1) *definierte Abbildung $F_A : K^n \to K^m$ ist linear.*

**Bemerkung:** Wenn man den $i$-ten Standardbasisvektor $e_i$ von $K^n$ (d.h., den Vektor, bei dem alle Komponenten gleich Null sind ausser der $i$-ten Komponente, welche gleich Eins ist) in die Abbildung $F$ einsetzt, dann erhält man als Bild einen speziellen Spaltenvektoren, nämlich genau die $i$-te Spalte der Matrix $A$. Dies ergibt sich sofort aus der Formel (5.1). Es ist für die folgenden Konstruktionen recht nützlich, sich diese Tatsache mit Hilfe des Satzes

**„Die Spalten der Matrix sind die Bilder der Basisvektoren."**

einzuprägen.
Wir beginnen das Studium von linearen Abbildungen mit folgendem Lemma, welches einige einfache Eigenschaften, die direkt aus der Definition folgen, festhält.

**Lemma 5.3.** *Seien $V, W$ $K$-Vektorräume und $F : V \to W$ eine lineare Abbildung.*

1. *Es ist $F(0) = 0$ und $F(-v) = -F(v)$ für alle $v \in V$.*
2. *Für alle $v_1, \ldots, v_n \in V$ und alle $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ gilt $F(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 F(v_1) + \ldots + \lambda_n F(v_n)$.*
3. *Falls $(v_i)_{i \in I}$ eine in $V$ linear abhängige Familie ist, so muss auch die Familie $(F(v_i))_{i \in I}$ in $W$ linear abhängig sein.*
4. *Sei $V' \subset V$ bzw. $W' \subset W$ ein Untervektorraum, dann ist das Bild $F(V')$ bzw. das Urbild $F^{-1}(W')$ ein Untervektorraum von $W$ bzw. von $V$.*
5. *Für die Dimension des Bildes gilt $\dim(F(V)) \leqslant \dim(V)$.*

6. *Falls $F$ ein Isomorphismus von Vektorräumen, also insbesondere bijektiv als Abbildung von $V$ nach $W$, ist, dann ist auch die Umkehrabbildung $F^{-1} : W \to V$ linear.*

*Beweis.* 1. Dass $F(0) = 0$ gilt, folgt aus der Tatsache, dass $F$ insbesondere ein Gruppenhomomorphismus $(V, +) \to (W, +)$ ist (und dann unter Verwendung von Lemma 3.5 3.(a)). Außerdem ist $F(-v) = F((-1)v) = (-1)F(v) = -F(v)$.

2. Diese Gleichung ensteht, indem man die Eigenschaft $F(\lambda v+\mu w) = \lambda F(v)+\mu F(w)$ wiederholt anwendet.

3. Dies folgt aus 1. und 2.: Falls $v_1, \ldots, v_n$ linear abhängig ist, gibt es eine Linearkombination $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$, wobei $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$ ist. Aber dann gilt

$$0 = F(0) = F(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 F(v_1) + \ldots + \lambda_n F(v_n)$$

und daher ist die Familie $F(v_1), \ldots, F(v_n)$ auch linear abhängig.

4. Man rechnet die Axiome für Untervektorräume für $F(V') \subset W$ und $F^{-1}(W') \subset V$ nach. Zunächst gilt wegen 1., dass $0 \in F(V')$ ist und auch, dass $0 \in F^{-1}(W')$ gilt, denn $0 \in W'$ und $0 \in F^{-1}(0)$. Seien $w, w' \in F(V')$, d.h., es gibt $v, v' \in V'$ mit $F(v) = w, F(v') = w'$. Dann ist $F(\lambda v + \mu v') = \lambda w + \mu w'$, also folgt $\lambda w + \mu w' \in F(V')$. Analog seien $v, v' \in F^{-1}(W')$ mit $w = F(v), w' = F(v')$, dann ist $F(\lambda v + \mu v') = \lambda w + \mu w'$. Da $W'$ ein Untervektorraum ist, folgt $\lambda w + \mu w' \in W'$, also ist $\lambda v + \mu v' \in F^{-1}(W')$.

5. Wir verwenden die Kontraposition der Aussage 3.: Sei $w_1 = F(v_1), \ldots, w_k = F(v_k)$ eine Basis von $F(V)$, dann ist sie insbesondere linear unabhängig, aber dann muss wegen 3. auch $v_1, \ldots, v_k$ linear unabhängig in $V$ sein, und dann ist $\dim(V) \geqslant k$.

6. Wir wählen $v, v' \in V$ und setzen $w = F(v)$, $w' = F(v')$. Dann gilt $v = F^{-1}(w)$ und $v' = F^{-1}(w')$ sowie $F(\lambda v + \mu v') = \lambda w + \mu w'$ für $\lambda, \mu \in K$, also

$$F^{-1}(\lambda w + \mu w') = F^{-1}(F(\lambda v + \mu v')) = \lambda v + \mu v' = \lambda F^{-1}(w) + \mu F^{-1}(w').$$

und damit ist $F^{-1} : W \to V$ auch eine lineare Abbildung.

□

Wir haben in Kapitel 2 gesehen, dass man Abbildungen verknüpfen kann. Wir studieren nun den Fall, das zwei zu verknüpfende Abbildungen linear sind.

**Lemma 5.4.** *Seien $U, V, W$ $K$-Vektorräume und seien lineare Abbildungen $F : U \to V$ und $G : V \to W$ gegeben. Dann ist auch $G \circ F : U \to W$ linear.*

*Beweis.* Seien $u, u' \in U$ und $\lambda, \mu \in K$. Dann ist

$$\begin{aligned}(G \circ F)(\lambda u + \mu u') &= G\left(F(\lambda u + \mu u')\right) \overset{(*)}{=} G(\lambda F(u) + \mu G(u)) \overset{(**)}{=} \lambda G(F(u)) + \mu G(F(u')) \\ &= \lambda (G \circ F)(u) + \mu (G \circ F)(u')\end{aligned}$$

Dabei folgt Gleichung (*) aus der Linearität von $F$ und Gleichung (**) aus der Linearität von $G$. □

Wir zeigen nun, dass die Menge $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ auch selbst ein $K$-Vektorraum ist.

**Satz 5.5.** *1. Sei $X$ eine Menge und sei $W$ ein $K$-Vektorraum. Dann ist die Menge $Abb(X, W)$ ein $K$-Vektorraum bezüglich punktweiser Addition und Skalarmultiplikation.*

*2. Sei nun auch $V$ ein $K$-Vektorraum, dann ist $Hom_K(V, W) \subset Abb(V, W)$ ein Untervektorraum.*

*3. Für $V = W$ schreiben wir $End_K(V) := Hom_K(V, V)$. Dann ist $(End_K(V), +, \circ)$ ein im Allgemeinen nicht kommutativer Ring, mit Einselement* $\mathrm{id}_V$.

*Beweis.* 1. Der Beweis funktioniert ganz analog zu Konstruktion einer Ringstruktur auf $\mathrm{Abb}(I, \mathbb{R})$ mit $I \subset R$ (siehe Beispiel 4. auf Seite 45), man definiert für $f, g \in \mathrm{Abb}(X, W)$ und $\lambda \in K$ einfach $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ und $(\lambda \cdot f)(x) := \lambda f(x)$, und dann kann man die Vektorraumaxiome einfach nachrechnen.

2. Wir weisen die Untervektorraumaxiome UV1-UV3 nach: Zunächst ist die Nullabbildung

$$\begin{array}{rcl} 0 : V & \longrightarrow & W \\ v & \longmapsto & 0 \end{array}$$

der Nullvektor sowohl in $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ als auch in $\mathrm{Abb}(V, W)$. Seien nun $\phi, \psi \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ und $\lambda \in K$ gegeben. Dann ist zu zeigen, dass $\phi + \psi \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ und $\lambda \cdot \phi \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ gilt. Seien also $v, w \in V$, $\alpha, \beta \in K$, dann ist

$$\begin{array}{rcl} (\phi + \psi)(\alpha v + \beta w) & = & \phi(\alpha v + \beta w) + \psi(\alpha v + \beta w) = \\ \alpha\phi(v) + \beta\phi(w) + \alpha\psi(x) + \beta\psi(w) & = & \alpha(\phi(v) + \psi(v)) + \beta(\phi(v) + \psi(v)) = \\ \alpha(\phi + \psi)(v) + \beta(\phi + \psi)(w) & & \end{array}$$

sowie

$$\begin{array}{rcl} \lambda\phi(\alpha v + \beta w) & = & \lambda \cdot \phi(\alpha v + \beta w) = \\ \lambda \cdot \alpha \cdot \phi(v) + \lambda \cdot \beta \cdot \phi(w) & = & \alpha \cdot \lambda\phi(v) + \beta \cdot \lambda\phi(w) \end{array}$$

Bemerke noch, dass das zu einer Abbildung $\phi \in \mathrm{Abb}(V, W)$ gehörende Inverse bezüglich der (punktweisen) Addition durch die Abbildung $-\phi$, welche $v \in V$ auf $-\phi(v) \in W$ abbildet, gegeben ist. Natürlich ist $-\phi$ eine lineare Abbildung, wenn $\phi$ eine war.

3. Auch hier rechnet man einfach die Ringaxiome nach. Als Beispiel wähle man $V = \mathbb{R}^2$, und man betrachte die beiden linearen Abbildungen $F_A$ und $F_B$, welche durch Formel (5.1) durch die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben sind. Dann gilt $F_A \circ F_B \neq F_B \circ F_A$, wie man durch Nachrechnen leicht prüft. Damit ist der Ring $(\mathrm{End}(\mathbb{R}^2), +, \circ)$ nicht kommutativ.

Im Lemma 5.21 weiter unten werden wir sehen, wie man die Komposition solcher Abbildungen effizienter ausrechnen kann.

□

## 5.2 Bild und Kern einer linearen Abbildung

Die folgende Definition ist rein formal, da die auftretenden Begriffe nicht nur für Vektorräume und lineare Abbildungen, sondern schon vorher für Gruppen und Gruppenhomomorphismen eingeführt wurden.

**Definition 5.6.** *Seien $V$ und $W$ Vektorräume und $F : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann heisst*

1. $\ker(F) := \{v \in V \mid F(v) = 0\}$ *der Kern von $F$,*
2. $\mathrm{Im}(F) := \{w \in W \mid \exists v \in V, F(v) = w\}$ *das Bild von $F$,*
3. $F^{-1}(w) := \{v \in V \mid F(v) = w\}$ *die Faser von $F$ über $w \in W$.*

Aus den bereits bewiesenen Eigenschaften ergeben sich sofort die folgenden Aussagen.

**Lemma 5.7.** *1. $\ker(F)$ bzw. $\mathrm{Im}(F)$ ist ein Untervektorraum von $V$ bzw. von $W$.*

*2. $F$ ist surjektiv genau dann, wenn $\mathrm{Im}(F) = W$ gilt.*

3. *$F$ ist injektiv genau dann, wenn* $\ker(F) = \{0\}$ *gilt.*

4. *Falls $v_1, \ldots, v_k$ in $V$ linear unabhängig sind und falls $F$ injektiv ist, dann sind auch die Vektoren $F(v_1), \ldots, F(v_k)$ in $W$ linear unabhängig.*

*Beweis.* Die ersten drei Punkte folgen sofort aus den Definitionen bzw. aus den entsprechenden Aussagen für $F$ gesehen als Gruppenhomomorphismus $F : (V, +) \to (W, +)$. Für die letzte Aussagen seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$ mit $\lambda_1 F(v_1) + \ldots + \lambda_k F(v_k) = 0$ gegeben, dann folgt, da $F$ linear ist, dass $F(\lambda_1 v_1 + \ldots \lambda_k v_k) = 0$ ist, d.h. $\lambda_1 v_1 + \ldots \lambda_k v_k \in \ker(F)$, und aus 3. schlussfolgern wir, dass dann $\lambda_1 v_1 + \ldots \lambda_k v_k = 0$ gilt. Da aber $v_1, \ldots, v_k$ als in $V$ linear unabhängig vorausgesetzt waren, folgt $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$. □

Eine wichtige Zahl, welche einer linearen Abbildung zugeordnet wird, definieren wir jetzt.

**Definition 5.8.** *Sei $F : V \to W$ linear. Dann heißt* $\dim_K(\mathrm{Im}(F))$ *der Rang von $F$, geschrieben* $\mathrm{rk}(F)$.

Falls $F$ eine lineare Abbildung von $K^n$ nach $K^m$ ist, welche durch Multiplikation mit der Matrix $A \in \mathrm{M}(m \times n, K)$ gegeben wird, dann ist $\mathrm{Im}(F) = \mathrm{Span}\,(A \cdot e_1, \ldots, A \cdot e_n) = \mathrm{SR}(A)$. Daher ist $\mathrm{rk}(F)$ in diesem Fall gleich dem Spaltenrang von $A$, welcher unter der Annahme von Lemma 4.29 gleich dem Zeilenrang von $A$ ist und welche wir auch mit $\mathrm{rk}(A)$ bezeichnet hatten.
Wie für eine beliebige Abbildung bezeichnet man das Urbild eines Elementes im Bild als *Faser*. Die Linearität impliziert, dass man die Fasern direkter beschreiben kann.

**Lemma 5.9.** *Sei $F : V \to W$ eine lineare Abbildung, sei $y \in \mathrm{Im}(F)$ und sei ein $x \in F^{-1}(y)$ gewählt. Dann gilt*

$$F^{-1}(y) = x + \ker(F) := \{x + v \,|\, v \in \ker(F)\}$$

*Beweis.* Sei $x' \in F^{-1}(y)$, dann folgt $F(x' - x) = F(x') - F(x) = y - y = 0$, also ist $x' - x \in \ker(F)$, dies bedeutet aber nichts anderes, als dass $x' \in x + \ker(F)$ gilt. Falls andererseits $x' = x + a$, mit $a \in \ker(F)$ ist, d.h. $F(a) = 0$, dann folgt $F(x') = F(x + a) = F(x) + F(a) = F(x) + 0 = F(x) = y$, also $x' \in F^{-1}(y)$. □

Die im Lemma auftretenden „verschobenen“ Untervektorräume haben einen Namen.

**Definition 5.10.** *Sei $V$ ein Vektorraum und $M \subset V$ eine beliebige Teilmenge. Dann heißt $M$ ein* affiner Unterraum *von $V$, falls entweder $M$ leer ist, oder falls es einen Untervektorraum $U \subset V$ sowie ein $x \in V$ gibt, so dass $M = x + U$ ist.*

Man bemerke, dass damit Untervektorräume spezielle Beispiele für affine Unterräume sind, nämlich, wenn man in der Definition $x = 0$ wählt. Der Vektor $x \in M$ mit $M = x + U$ wird manchmal „Aufpunkt“ genannt. Wir hatten schon früher gesehen, dass Geraden oder Ebenen in $\mathbb{R}^n$ Untervektorräume sind genau dann, wenn sie durch den Ursprung gehen. Eine beliebige Gerade oder eine beliebige Ebene ist damit also ein affiner Unterraum.
Bei der obigen Definition ist für einen affinen Unterraum a priori weder der Untervektorraum $U$ noch der Vektor $x$ eindeutig bestimmt. Das folgende Lemma klärt, wieviel Freiheit man in der Wahl dieser beiden Objekte hat.

**Lemma 5.11.** *Sei $M = x + U \subset V$ ein affiner Unterraum wobei $x \in V$ und $U \subset V$ ein Untervektorraum ist. Dann gilt*

1. *Sei $x' \in M$ beliebig, dann ist $M = x' + U$,*

2. *Sei $x' \in V$ und sei $U' \subset V$ ein Untervektorraum. Falls $x' + U' = x + U$ gilt, dann ist $U = U'$ und $x - x' \in U$.*

Damit sehen wir, dass der einen affinen Unterraum $M$ definierende Untervektorraum $U$ eindeutig bestimmt ist, dass man aber zum Aufpunkt $x$ stets einen Vektor aus $U$ addieren kann, ohne $M$ zu ändern.

*Beweis.* 1. Sei $x' \in M$, dann ist $x' = x + u$ mit $u \in U$. Dann ist aber $x' + U = x + u + U = x + U$, denn wegen $u \in U$ und weil $U$ ein Vektorraum ist, gilt $u + U = U$.

2. Wir setzen $M - M := \{x - x' \mid x, x' \in M\}$, dann rechnet man nach, dass aus $M = x + U$ die Gleichheit $M - M = U$ und aus $M = x' + U'$ die Gleichheit $M - M = U'$ folgt. Also ist $U = U'$, und dann impliziert $x + U = M = x' + U$, dass es ein $u \in U$ mit $x = x' + u$ gibt, dies zeigt $x - x' \in U$.

□

Wir können aufgrund des letzten Lemmas für einen affinen Unterraum $M = x + U$ durch $\dim(M) := \dim(U)$ auch eine Dimension definieren. Falls der affine Unterraum als Faser einer linearen Abbildung zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen auftritt, wollen wir diese Dimension genauer untersuchen. Dazu wählen wir geeignete Basen des Definitions- und Bildraumes der linearen Abbildung.

**Satz 5.12.** *Sei $F : V \to W$ linear, sei $V$ endlich-dimensional. Wähle eine Basis $v_1, \ldots, v_k$ von $\ker(F)$ und eine Basis $w_1, \ldots, w_r$ von $\mathrm{Im}(F)$. Wähle weiterhin beliebige Vektoren $u_i \in F^{-1}(w_i)$ für $i = 1, \ldots, r$. Dann ist die Familie $(u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_k)$ eine Basis von $V$. Insbesondere gilt die* Dimensionsformel *für lineare Abbildungen:*

$$\dim(V) = \dim \ker(F) + \dim \mathrm{Im}(F).$$

*Beweis.* Wir zeigen zunächst, dass $(u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_k)$ ein Erzeugendensystem ist. Sei $a \in V$ vorgegeben, dann ist $F(a) \in \mathrm{Im}(F)$, d.h. es gibt $\mu_1, \ldots, \mu_r \in K$ mit

$$F(a) = \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_r w_r.$$

Da nun aber wegen Lemma 5.9 $F^{-1}(F(a)) = a + \ker(F)$ ist, folgt, dass es ein $v \in \ker(F)$ gibt mit $a = v + \mu_1 u_1 + \ldots + \mu_r u_r$. Wegen $v \in \ker(F)$ existieren $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$ mit $v = \lambda_1 v_1 + \ldots, +\lambda_k v_k$, also insgesamt

$$a = \lambda_1 v_1 + \ldots, +\lambda_k v_k + \mu_1 u_1 + \ldots + \mu_r u_r$$

also $a \in \mathrm{Span}\,(u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_k)$. Nun zur linearen Unabhängigkeit. Seien Koeffizienten $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mu_1, \ldots, \mu_r \in K$ vorgegeben, so dass

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k + \mu_1 u_1 + \ldots + \mu_r u_r = 0$$

gilt. Dann wenden wir auf diese Gleichung die Abbildung $F$ an und erhalten $0 = F(0) = \lambda_1 F(v_1) + \ldots + \lambda_k F(v_k) + \mu_1 F(u_1) + \ldots + \mu_r F(u_r) = \mu_1 w_r + \ldots + \mu_r w_r$. Da $w_1, \ldots, w_r$ linear unabhängig in $W$ sind (denn sie sind eine Basis von $\mathrm{Im}(F) \subset W$), folgt $\mu_1 = \ldots = \mu_r = 0$, aber dann haben wir die Gleichung $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k = 0$. Da aber $v_1, \ldots, v_k$ in $V$ linear unabhängig sind (denn sie sind eine Basis von $\ker(F) \subset V$), folgt auch $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$, wie gewünscht. □

Wir erhalten folgende Konsequenzen.

**Korollar 5.13.** *1. Sei $F : V \to W$ eine lineare Abbildung. Falls $\dim(V) < \infty$ ist, dann gilt für alle $w \in \mathrm{Im}(F)$, dass*

$$\dim F^{-1}(w) = \dim(V) - \dim \mathrm{Im}(F).$$

*2. Sei $\dim(V) < \infty$ und $\dim(W) < \infty$, und sei $F : V \to W$ ein Isomorphismus. Dann gilt $\dim(V) = \dim(W)$.*

*3. Sei $F : V \to W$ linear und sei $\dim(V) = \dim(W) < \infty$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent.*

*(a) $F$ ist injektiv,*

*(b) $F$ ist surjektiv,*

*(c) $F$ ist bijektiv.*

*Beweis.* 1. Dies folgt direkt aus der Definition der Dimension eines affinen Unterraums und der Dimensionsformel des letzten Satzes.

2. Es gilt $\ker(F) = \{0\}$, also $\dim_K(\ker(F)) = 0$. Da $F$ auch surjektiv ist, folgt aus der Dimensionsformel, dass $\dim(V) = \dim(W)$ ist. Es sei bemerkt, dass auch die Umkehrung dieser Aussage gilt: Falls $\dim(V) = \dim(W)$ ist, dann existiert ein Isomorphismus von $V$ nach $W$, dies folgt aus Lemma 5.15 weiter unten.

3. Dies ist sofort aus der Dimensionsformel klar.

□

Eine Besonderheit von Vektorräumen im Vergleich zu anderen algebraischen Objekten ist, dass bei einer gegebenen linearen Abbildung $F : V \to W$ den Ausgangsraum $V$ in den Kern von $F$ und einen weiteren (nicht-eindeutig bestimmten) Untervektorraum aufspalten kann. Dies leistet der nächste Satz.

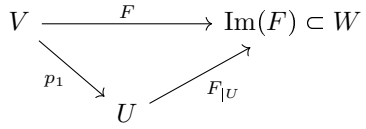
**Satz 5.14.** *Sei $F : V \to W$ eine lineare Abbildung, und sei $(v_1, \ldots, v_k)$ eine Basis von $\ker(F)$. Erweitere diese gemäß dem Basisergänzungssatz (Satz 4.22) zu einer Basis $(v_1, \ldots, u_k, u_1, \ldots, u_r)$ von $V$ und setze $U := \mathit{Span}(u_1, \ldots, u_r)$. Dann gilt*

1. *$V = U \oplus \ker(F)$,*
2. *Die eingeschränkte Abbildung $F_{|U} : U \to \mathrm{Im}(F)$ ist ein Isomorphismus,*
3. *Wir betrachten die* Projektionsabbildung *(auf den ersten Summanden)*

$$\begin{array}{rcl} p_1 : U \oplus \ker(F) & \longrightarrow & U \\ v = u + v' & \longmapsto & u \end{array}$$

*dann gilt: $F = F_{|U} \circ p_1$.*

Die letzte Aussage lässt sich folgendermaßen formuliere. Man betrachte das folgende Diagramm von Vektorräumen und linearen Abbildungen.




Man sagt, dass dieses Diagramm kommutiert, d.h., dass die Komposition beliebiger Abbildungen von einem gegebenen Vektorraum zu einem anderen immer gleich ist, d.h. in diesem Fall, dass die zwei „Pfade“ von $V$ nach $\mathrm{Im}(F)$, nämlich $F$ und $F_{|U} \circ p_1$ gleich sind.

*Beweis.* 1. Die folgt direkt aus Lemma 4.32, Punkt 2.(a).

2. Es gilt, dass $\ker(F_{|U}) = \ker(F) \cap U$ ist, aber da die Summanden $\ker(F)$ und $U$ in der Zerlegung $V = U \oplus \ker(F)$ direkt sind, ist $\ker(F) \cap U = \{0\}$, also ist $\ker(F_{|U})$ injektiv. Aus der Dimensionsformel (Satz 5.12) folgt jetzt, dass $\dim(U) = \dim \mathrm{Im}(F)$ ist, und dann liefert das Korollar 5.13, dass $F_{|U} : U \to \mathrm{Im}(F)$ auch surjektiv, also bijektiv und daher ein Isomorphismus sein muss.

3. Sei $v = u + v'$, mit $u \in U$ und $v' \in \ker(F)$. Dann ist $F(v) = F(u) + F(v') = F(u)$, aber wegen $u \in U$ gilt $F(u) = (F_{|U})(u)$, daher ist $F(v) = (F_{|U}(p_1(v))) = (F_{|U} \circ p_1)(v)$.

□

Die Bedeutung dieses Satzes ist, dass man jede lineare Abbildung $F : V \to W$ in eine Projektion auf einen Untervektorraum (oben $p_1$ genannt), einen Isomorphismus (oben $F_{|U}$ genannt), und eine Inklusion (d.h., injektive lineare Abbildung) (oben die Inklusion von $\mathrm{Im}(F)$ in $W$) zerlegen kann.

## 5.3 Lineare Abbildungen und Matrizen

Wir haben bereits weiter oben in Lemma 5.2 gesehen, dass jede Matrix durch (Links)multiplikation eine lineare Abbildung definiert. Tatsächlich geht der Zusammenhang zwischen linearen Abbildungen und Matrizen noch viel weiter, wir werden in diesem Abschnitt sehen, dass jede lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen durch eine (allerdings nicht eindeutig bestimmte) Matrix gegeben ist. Damit können wir viele Fragen über lineare Abbildungen auf das Studium von Matrizen zurückführen.
Als Vorbereitung betrachten wir die Frage, durch wieviele Vorgaben eine lineare Abbildung eindeutig bestimmt wird.

**Lemma 5.15.** *Seien $V$ und $W$ Vektorräume, welche beide endliche Dimension haben. Gegeben seien Vektoren $v_1, \ldots, v_r \in V$ und $w_1, \ldots, w_r \in W$. Dann gilt:*

1. *Seien $v_1, \ldots, v_r$ linear unabhängig, dann existiert mindestens eine lineare Abbildung $F : V \to W$, so dass $F(v_i) = w_i$ ist (für alle $i = 1, \ldots, r$).*
2. *Falls $v_1, \ldots, v_r$ sogar eine Basis von $V$ ist, dann existiert genau eine lineare Abbildung $F : V \to W$ mit $F(v_i) = w_i$ für alle $i = 1, \ldots, r$. Es gilt dann $\mathrm{Im}(F) = \mathrm{Span}\,(w_1, \ldots, w_r)$, und $F$ ist injektiv genau dann, wenn auch die Familie $w_1, \ldots, w_r$ linear unabhängig ist.*

*Beweis.* Der Beweis ist einfacher zu führen, wenn man erst den Teil 2. zeigt und dann beim Beweis von 1. verwendet

**Beweis von 2.** Zunächst beweisen wir die Eindeutigkeit: Sei $v \in V$, dann gibt es eine eindeutige Darstellung $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r$. Falls es eine lineare Abbildung $F$ mit den gesuchten Eigenschaften gibt, dann muss sie wegen der Linearität und wegen $F(v_i) = w_i$ die Gleichung

$$F(v) = \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_r w_r \tag{5.2}$$

erfüllen, d.h., dass Bild $F(v)$ ist eindeutig festgelegt. Natürlich liefert die Gleichung (5.2) auch eine Definition der gesuchten Abbildung $F$, allerdings ist dann noch nicht unmittelbar klar, dass es sich auch um eine lineare Abbildung handelt. Dies rechnen wir explizit nach. Seien $v, v' \in V$ mit $v$ wie oben und $v' = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_r v_r$ und seien $\lambda, \mu \in K$, dann ist

$$\begin{aligned} F(\lambda v + \mu v') &= F(\lambda\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda\lambda_r v_r + \mu\mu_1 v_1 + \ldots + \mu\mu_r v_r) \\ &= F\left((\lambda\lambda_1 + \mu\mu_1)v_1 + \ldots + (\lambda\lambda_r + \mu\mu_r)v_r\right) \\ &= (\lambda\lambda_1 + \mu\mu_1)w_1 + \ldots + (\lambda\lambda_r + \mu\mu_r)w_r \\ &= \lambda(\lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_r w_r) + \mu(\mu_1 w_1 + \ldots + \mu_r w_r) \\ &= \lambda F(v) + \mu F(v') \end{aligned}$$

Man beachte, dass in der Gleichheit in der dritten Zeile nicht etwa die Linearität von $F$ verwendet wird, denn die wollen wir ja erst beweisen, sondern dass da genau die Definition von $F$, gegeben durch Gleichung (5.2) benutzt wird.

Jetzt sind noch die beiden letzten Aussagen von Teil 2 zu beweisen. Da jedes Element $F(v)$ im Bild von $F$ nach Konstruktion eine Linearkombination der Vektoren $w_1, \ldots, w_r$ ist, folgt $\mathrm{Im}(F) \subset \mathrm{Span}\,(w_1, \ldots, w_r)$. Ist aber andererseits $w = \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_r w_r \in \mathrm{Span}\,(w_1, \ldots, w_r)$ gegeben, dann gilt (wieder nach Konstruktion von $F$), dass $w = F(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r)$ ist, also $w \in \mathrm{Im}(F)$.

Nun haben wir noch die letzte Äquivalenz zu zeigen: Angenommen, die oben konstruierte Familie $F$ ist injektiv. Sei eine Linearkombination $\lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_r w_r = 0$ vorgegeben, dann ist $\lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_r w_r = \lambda_1 F(v_1) + \ldots + \lambda_r F(v_r) = F(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r)$, also $F(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r) = 0$, also $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r \in \ker(F)$, da aber $F$ injektiv ist, folgt $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r = 0$. Nun ist aber $v_1, \ldots, v_r$ eine Basis von $V$, also linear unabhängig, also folgt $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0$, also war die Familie $w_1, \ldots, w_r$ linear unabhängig. Nehmen wir andererseits an, dass $w_1, \ldots, w_r$ linear unabhängig ist, und sei $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r \in V$ mit $v \in \ker(F)$, d.h. $F(v) = 0$ vorgegeben. Dann folgt

$$0 = F(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r) = \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_r w_r$$

und aus der linearen Unabhängigkeit von $w_1, \ldots, w_r$ folgt dann $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0$, also $v = 0$, und damit muss $F$ injektiv sein.

**Beweis von 1.** Sei die Familie $v_1, \ldots, v_r$ linear unabhängig, dann können wir sie nach dem Basisergänzungsatz (Satz 4.22) zu einer Basis $v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n)$ von $V$ ergänzen. Wir wählen dann beliebige Vektoren $w_{r+1}, \ldots, w_n$ in $W$, und dann existiert nach 2. genau eine Abbildung $F : V \to W$ mit $F(v_i) = w_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Damit haben wir eine Abbildung gefunden, die die in 1. genannte Bedingung erfüllt. Klar ist aber natürlich, dass das so konstruierte $F$ von der Wahl der zusätzlichen Vektoren $v_{r+1}, \ldots, v_n \in V$ und der Wahl deren Bilder $w_{r+1}, \ldots, w_n$ in $W$ abhängt, also nicht eindeutig ist.

□

Der obige Satz erscheint ein bischen technisch, hat aber zwei wichtige Konsequenzen, welche uns unserem Ziel, lineare Abbildungen durch Matrizen darzustellen, schon ein ganzes Stück näher bringen.

**Korollar 5.16.** *1. Sei $V$ ein Vektorraum, und sei eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ von $V$ gegeben. Dann gibt es genau einen Isomorphismus von $K$-Vektorräumen $\Phi_{\mathcal{B}} : K^n \to V$, welcher $\Phi_{\mathcal{B}}(e_i) = v_i$ erfüllt, hierbei ist $(e_1, \ldots, e_n)$ die kanonische Basis von $K^n$ welche durch die Standardvektoren*

$$e_i = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0}_{i-Stelle}$$

*gebildet wird.*

*2. Sei $F : K^n \to K^m$ eine lineare Abbildung. Dann existiert genau eine Matrix $A \in M(m \times n, K)$, so dass gilt:*

$$F(x) = A \cdot x \qquad \forall x \in K^n,$$

*hierbei betrachten wir $x \in K^n$ als Spaltenvektor.*

Der zweite Teil dieses Korollars ist als Umkehrung von Lemma 5.2 zu verstehen: Nicht nur ist die (Links-)multiplikation von Spaltenvektoren mit Matrizen linear, sondern jede lineare Abbildung zwischen $K^n$ und $K^m$ lässt sich als Multiplikation mit einer eindeutig bestimmten Matrix schreiben.

*Beweis.* 1. Dies folgt direkt aus Teil 2. des letzten Satzes.

2. Sei $A$ die Matrix mit den Spalten $F(e_1), \ldots, F(e_n)$. Dann gilt $A \cdot e_i = F(e_i)$, also bilden sowohl die Abbildung $F$ als auch die Abbildung, welche durch Linksmultiplikation mit $A$ gegeben ist, die Vektoren $e_i \in K^n$ auf die Vektoren $F(e_i) \in K^m$ ab. Die Eindeutigkeitsaussage im Teil 2. des letzten Satzes liefert dann, dass diese beiden Abbildungen gleich sind.

□

Der nächste Satz ist eine Verallgemeinerung des zweiten Teils des Korollars, und eine der wichtigsten Aussagen der linearen Algebra überhaupt. Er besagt, dass sich durch Wahl von Basen *jede* lineare Abbildung (nicht nur zwischen $K^n$ und $K^m$) durch eine Matrix beschreiben lässt, die allerdings von der Wahl der Basis abhängt.

**Satz 5.17.** *Seien $V$ und $W$ endlich-dimensionale Vektorräume und seien Basen $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ von $V$ und $\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_m)$ von $W$ vorgegeben. Sei $F : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F) = (a_{ij}) \in M(m \times n, K)$, so dass gilt*

$$F(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \tag{5.3}$$

*Dadurch bekommen wir eine Abbildung (die auch von der Wahl der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ abhängt)*

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} : Hom_K(V,W) &\longrightarrow M(m \times n, K) \\ F &\longmapsto M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F) \end{aligned}$$

*welche ein Isomorphismus von $K$-Vektorräumen ist. Man sagt, dass die lineare Abbildung $F$ bezüglich der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ durch die Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$* dargestellt *wird.*

*Beweis.* Klar ist, dass sich (weil $\mathcal{B}$ eine Basis von $W$ ist), jeder Vektor $F(v_i)$ eindeutig, d.h., mit eindeutig bestimmten Koeffizienten, als Linearkombination von $w_1, \ldots, w_m$ darstellen lässt. Daher sind die Koeffizienten $a_{ij}$, also die Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$ eindeutig bestimmt, und damit ist die Abbildung $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ wohldefiniert. Wir müssen zunächst zeigen, dass sie linear ist, hierzu müssen wir natürlich die Vektorraumstrukturen auf $\mathrm{Hom}_K(V,W)$ (siehe Satz 5.5) und auf $\mathrm{M}(m \times n, K)$ (siehe Lemma 4.24) verwenden. Seien also $F, G \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$ und $\lambda \in K$ gegeben, und seien $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F) = (a_{ij})$ und $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(G) = (b_{ij})$ dann ist für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$

$$(\lambda F + G)(v_j) = \lambda F(v_j) + G(v_j) = \sum_{i=1}^{m} \lambda \cdot a_{ij} w_i + \sum_{i=1}^{m} b_{ij} w_i = \sum_{i=1}^{m} (\lambda a_{ij} + b_{ij}) w_i$$

Also gilt nach Definition $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\lambda F + G) = \lambda M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F) + M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(G)$, d.h., die Abbildung $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ ist linear. Es bleibt noch, die Bijektivität dieser Abbildung zu zeigen: Sei eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(m \times n, K)$ gegeben, dann wird durch die Formel (5.3) eine lineare Abbildung von $V$ nach $W$ definiert, aber diese ist eindeutig, wieder wegen Lemma 5.15, Teil 2. Damit hat $A$ ein eindeutiges Urbild unter $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$, also ist diese Abbildung bijektiv. □

Wir bemerken noch, dass man den eben konkret konstruierten Isomorphismus $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ auch in etwas abstrakterer Weise erhalten kann.

**Lemma 5.18.** *Seien wie oben $V, W$ endlich-dimensionale Vektorräume und $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ bzw. $\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_m)$ eine Basis von $V$ bzw. von $W$. Sei $F : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann ist das folgende Diagramm von linearen Abbildungen von $K$-Vektorräumen kommutativ:*

$$\begin{array}{ccc} K^n & \xrightarrow{M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)} & K^m \\ {\scriptstyle \Phi_{\mathcal{A}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Phi_{\mathcal{B}}} \\ V & \xrightarrow{F} & W \end{array}$$

*d.h., es gilt $F \circ \Phi_{\mathcal{A}} = \Phi_{\mathcal{B}} \circ M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$.*
*Da $\Phi_{\mathcal{A}}$ und $\Phi_{\mathcal{B}}$ Isomorphismen sind, gilt also insbesondere $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F) = (\Phi_{\mathcal{B}})^{-1} \circ F \circ \Phi_{\mathcal{A}}$, dies liefert eine alternative Definition des Isomorphismus $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$.*

*Beweis.* Sei $(e_1, \ldots, e_m)$ die Standardbasis in $K^m$ und (zur Unterscheidung wählen wir andere Namen) $(e'_1, \ldots, e'_n)$ die Standardbasis in $K^n$. Es gilt $\Phi_{\mathcal{A}}(e'_j) = v_j$ und $\Phi_{\mathcal{B}}(e_i) = w_i$. Nach Definition ist $F(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$, also

$$(F \circ \Phi_{\mathcal{A}})(e'_j) = F(\Phi_{\mathcal{A}}(e'_j)) = F(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \Phi_{\mathcal{B}}(e_i) = \Phi_{\mathcal{B}}(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} e_i) = \Phi_{\mathcal{B}}\left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F) \cdot e'_j\right),$$

also gilt, wie gewünscht: $F \circ \Phi_{\mathcal{A}} = \Phi_{\mathcal{B}} \circ M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$. □

Eine lineare Abbildung $F$ wird also durch eine Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ beschrieben, aber je nach Wahl der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ kann diese Matrix sehr unterschiedlich aussehen. Man versucht daher, Basen zu wählen, so dass diese Matrix möglichst einfach wird. Dies liefert der folgende Satz.

**Korollar 5.19.** *Seien $V, W$ endlich-dimensional, und $F : V \to W$ linear. Sei $\mathcal{A} = (u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_k)$ bzw. $(w_1, \ldots, w_r)$ eine Basis von $V$ bzw. von $\mathrm{Im}(F)$ wie in Satz 5.12, d.h., $(v_1, \ldots, v_k)$ ist eine Basis von $\ker(F)$ und $u_i \in F^{-1}(w_i)$ Sei $n = r + k$ und wähle eine Ergänzung $\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_r, w_{r+1}, \ldots, w_m)$ zu einer Basis von $W$, dann gilt*

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M(m \times n, K)$$

*hierbei ist $E_r \in Mat(r \times r, K)$ die Einheitsmatrix der Größe $r$ und die Nullen repräsentieren (nicht notwendig quadratische) Matrizen, welche nur Nullen als Einträge enthalten.*

*Beweis.* Da $F(v_j) = 0$ (für $j \in \{1, \ldots, k\}$) und $F(u_j) = w_j$ (für $j \in \{1, \ldots, r\}$) gilt, folgt die Aussage direkt aus der Definition der Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ im Satz 5.17. □

Wir sehen also, dass wir die eine Abbildung darstellende Matrix durch Wahl von geeigneten (d.h., an die Abbildung angepassten) Basen immer sehr stark vereinfachen können. Für den Spezialfall eines Endomorphismus $F : V \to V$ kann man das Problem abwandeln: Statt zwei verschiedene Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ von $V$ zu wählen, so dass die Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$ möglichst einfach wird, möchte man hier nur *eine* Basis $\mathcal{A}$ finden, so dass die Matrix $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(F)$ möglichst einfach wird. Da man dabei wesentlich weniger Wahlfreiheit hat, ist dieses Problem viel schwieriger zu behandeln, allerdings auch viel interessanter. Damit werden wir uns im Kapitel **??** beschäftigen.

## 5.4 Matrizenmultiplikation

Wir haben in Kapitel 1 schon erwähnt, dass man die Matrizenschreibweise eines linearen Gleichungssystems auch als Multiplikation einer Matrix in $\mathrm{M}(m \times n, K)$ mit einem Spaltenvektor in $\mathrm{M}(n \times 1, K)$ deuten kann. Wir wollen nun sehen, unter welchen Umständen man Matrizen im Allgemeinen multiplizieren kann, und was das für die durch diese Matrizen dargestellten linearen Abbildungen bedeutet.

**Definition 5.20.** *Seien Matrizen $A = (a_{ij}) \in M(m \times n, K)$ und $B = (b_{jk}) \in M(n \times r, K)$ gegeben, d.h., die Indizes erfüllen $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ und $k \in \{1, \ldots, r\}$. Dann definieren wir das Produkt $C = (c_{ik}) := A \cdot B \in M(m \times r, K)$ durch*

$$c_{ik} := \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}.$$

Man beachte, dass diese Multiplikation nur definiert ist, wenn die Anzahl der Spalten von $A$ gleich der Anzahl der Zeilen von $B$ ist, hier gleich $n$. Die Zahl $n$ verschwindet im Ergebnis $C$, und $C$ hat genauso viel Zeilen wie $A$ und genauso viel Spalten wie $B$.
Will man die Multiplikation von Matrizen wirklich ausführen, ist es sinnvoll, die folgende Anordnung im Kopf zu haben:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & \mathbf{b_{1k}} & \ldots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \ldots & \mathbf{b_{nk}} & \ldots & b_{nr} \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{a_{i1}} & \ldots & \mathbf{a_{in}} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1r} \\ & & \\ \vdots & \mathbf{c_{ik}} & \vdots \\ & & \\ c_{m1} & \ldots & c_{mr} \end{pmatrix} \end{array} \tag{5.4}$$

Hierbei sieht man direkt, dass der Eintrag $c_{ik}$ durch die Summe $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}$ ermittelt wird. Nun noch ein praktisches Beispiel, bei welchem wir die Matrizen natürlich wieder nebeneinander schreiben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 13 & 17 & 6 \\ 3 & 17 & 20 & 9 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Als Spezialfälle der obigen Definition betrachten wir die Multiplikation von Zeilen- und Spaltenvektoren, der gleichen Länge, d.h. von einer $1 \times n$-Matrix $A$ und einer $n \times 1$-Matrix $B$. Hier können wir sowohl das Produkt $A \cdot B$ als auch das Produkt $B \cdot A$ bilden, aber das Ergebnis sieht in beiden Fällen ganz anders aus. Sei $n = 3$ und sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(1 \times 1, K) \qquad \text{und} \qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3 \times 3, K).$$

Wir wenden nun Definition 5.20 auf Matrizen an, welche lineare Abbildungen darstellen.

**Lemma 5.21.** *Seien wieder $A = (a_{ij}) \in M(m \times n, K)$ und $B = (b_{jk}) \in M(n \times r, K)$, und wir betrachten die durch Multiplikation mit $A$ und $B$ gegebenen linearen Abbildungen*

$$K^r \xrightarrow{B} K^n \xrightarrow{A} K^m$$

*Dann ist die Komposition dieser Abbildungen (diese ist also eine lineare Abbildung von $K^r$ nach $K^m$) gegeben durch Multiplikation mit der Matrix $A \cdot B$.*

*Beweis.* Sei $x \in K^r$, $y = B \cdot x \in K^n$ und $z = A \cdot y \in K^m$, wir visualisieren die Komposition der Abbildungen folgendermaßen

$$K^r \xrightarrow{B\cdot} K^n \xrightarrow{A\cdot} K^m$$

$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} \longmapsto y := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \longmapsto z := \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}$$

Dann gilt

$$y_j = \sum_{k=1}^{r} b_{jk} x_k \qquad \forall j \in \{1, \ldots, n\} \qquad \text{und} \qquad z_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \qquad \forall i \in \{1, \ldots, m\}.$$

Durch Einsetzen der zweiten in die erste Gleichung erhalten wir

$$z_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \left( \sum_{k=1}^{r} b_{jk} x_k \right) = \sum_{k=1}^{r} \left( \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} \right) x_k$$

Wenn wir jetzt $c_{ik} := \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}$ setzten, dann erfüllt die Matrix $C := (c_{ik}) \in \mathrm{M}(m \times r, K)$ genau die Bedingung $z_i = \sum_{k=1}^{r} c_{ik} x_k$, d.h. $z = C \cdot x$. □

Zur Vereinfachung des Rechnens mit Matrizen fassen wir die wichtigsten Regeln zusammen.

**Lemma 5.22.** *Seien $A, A' \in M(m \times n, K)$, $B, B' \in M(n \times r, K)$ und $C \in M(r \times s, K)$ sowie $\lambda \in K$ gegeben, dann gilt*

1. $A \cdot (B + B') = A \cdot B + A \cdot B'$ *und* $(A + A') \cdot B = A \cdot B + A' \cdot B$,
2. $A \cdot (\lambda B) = \lambda(A \cdot B)$,
3. $E_m \cdot A = A \cdot E_n = A$,
4. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$,
5. ${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$.

*Beweis.* Wirklich zu beweisen sind nur die Punkte 4. und 5. Zunächst zu 4., also zur Assoziativität der Matrizenmultiplikation. Diese kann man direkt nachrechnen, muss dabei allerdings ziemlich mit den Indizes kämpfen. Stattdessen geben wir einen etwas abstrakteren Beweis, welcher den schon bewiesenen Zusammenhang zwischen Matrizen und linearen Abbildungen benutzt. Wir betrachten die folgenden linearen Abbildungen:

$$K^s \xrightarrow{C} K^r \xrightarrow{B} K^n \xrightarrow{A} K^m$$

Wie in Definition 2.10, 6., bemerkt wurde, erfüllen diese linearen Abbildungen das Assoziativgesetz, d.h., es gilt

$$(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C),$$

und das letzte Lemma sagt, dass die Komposition zweier lineare Abbildungen, welche durch Linksmultiplikation von Spaltenvektoren mit Matrizen gegeben wird, genau die Multiplikation der Vektoren mit dem Produkt der beiden Matrizen ist. Daher impliziert das Assoziativgesetz der linearen Abbildungen das Assoziativgesetz für Matrizenmultiplikation.
Zum Punkt 5.: Sei wie vorher $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{jk})$, dann ist $A \cdot B = (c_{ik})$, wobei $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}$ gilt. Dann haben wir ${}^t(A \cdot B) = (c'_{ki})$ mit Einträgen $c'_{ki}$, welche $c'_{ki} = c_{ik}$ erfüllen. Analog ist ${}^tA = (a'_{ji})$ und ${}^tB = (b'_{kj})$, mit $a'_{ji}) = a_{ij}$ und $b'_{kj} = b_{jk}$. Wir erhalten ${}^tB \cdot {}^tA = (d_{ki})$, wobei $d_{ki} = \sum_{j=1}^{n} b'_{kj} \cdot a'_{ji}$ gilt. Setzt man in diese Gleichung $a'_{ji})a_{ij}$ und $b'_{kj} = b_{jk}$ ein, so erhält man

$$d_{ki} = \sum_{j=1}^{n} b_{jk} \cdot a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} = c_{ik}$$

Damit gilt also $(d_{kj}) = {}^t(c_{jk})$, also ${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$, wie gewünscht. □

Besonders interessant sind die obigen Rechenregeln natürlich im Fall quadratischer Matrizen. Dann erhalten wir folgende Konsequenz.

**Korollar 5.23.** *Die Menge $M(n \times n, K)$ ist ein Ring bezüglich der Addition wie sie im Beweis von Lemma 4.24 und der Multiplikation, wie sie in Definition 5.20 eingeführt wurde. Das Nullelement ist die Nullmatrix, und das Einselement ist die Einheitsmatrix $E_n$.*

Durch einfaches Nachrechnen prüft man, dass $A \cdot B \neq B \cdot A$ für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gilt. Daran erkennt man, dass der Ring $\mathrm{M}(n \times n, K)$ im Allgemeinen nicht kommutativ ist. Wir erinnern uns, dass wir eine ganz ähnliche Rechnung schon einmal ausgeführt hatten, nämlich im Beweis zu Satz 5.5, 3. Dies ist kein Zufall, wie das nächste Lemma zeigt.

**Lemma 5.24.** *Sei $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ die kanonische Basis von $K^n$ bestehend aus den Standardbasisvektoren. Betrachte den kanonischen Isomorphismus $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} : End_K(K^n) \to M(n \times n, K)$ aus 5.17. Dann sind die beiden Ringstrukturen aus $End_K(K^n)$ und $M(n \times n, K)$ kompatibel, d.h., für alle alle $F, G \in End_K(K^n)$ gilt $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(F + G) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(F) + M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(G)$ und $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(F \circ G) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(F) \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(G)$. Man sagt, dass $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$ ein Ringhomomorphismus, und, da es natürlich eine bijektive Abbildung ist, sogar ein Ringisomorphismus ist.*

Der Beweis erfolgt durch Einsetzen der Definition und direktes Nachrechnen. Diese Aussage ist im übrigen ein Spezialfall der weiter unten in Lemma 5.29 abgeleiteten Kompatibilität zwischen der Hintereinanderausführung von linearen Abbildungen und der Multiplikation von Matrizen.
Da wir jetzt also lineare Abbildungen und quadratische Matrizen kanonisch, d.h., ohne irgendwelche Wahlen treffen zu müssen, identifizieren können, stellt sich die Frage, welche Matrizen den bijektiven Endomorphismen, also den Automorphismen von $K^n$ entsprechen. Wir haben bereits in Lemma 5.3, 6. gesehen dass ein Automorphismus $F$ eine Umkehrabbildung $F'$ hat, welche auch linear ist, und dann gilt $F \circ F' = F' \circ F = \mathrm{Id}_{K^n}$. Genau diese Eigenschaft benutzen wir, um die entsprechenden Matrizen zu charakterisieren.

**Definition 5.25.** *Sei $A \in M(n \times n, K)$. Dann heißt $A$* invertierbar*, falls es eine Matrix $A' \in M(n \times n, K)$ gibt, so dass gilt:*

$$A \cdot A' = A' \cdot A = E_n.$$

*Wir schreiben*

$$GL(n, K) := \{A \in M(n \times n, K) \mid A \text{ invertierbar}\}$$

Die wichtigste Eigenschaft invertierbarer Matrizen ist die folgende.

**Lemma 5.26.** *Die Menge $GL(n, K)$ ist eine (im Allgemeinen nicht-abelsche) Gruppe mit der Matrizenmultiplikation als Verknüpfung, und der Einheitsmatrix $E_n$ als Einselement.*

*Beweis.* Zunächst ist zu zeigen, dass die Matrizenmultiplikation auch wirklich eine Verknüpfung definiert, d.h., dass für $A, B \in \mathrm{GL}(n, K)$ auch $A \cdot B \in \mathrm{GL}(n, K)$ gilt. Nach Definition existieren $A', B' \in \mathrm{M}(n \times n, K)$ mit $A \cdot A' = A' \cdot A = B \cdot B' = B' \cdot B = E_n$ Dann folgt

$$(A \cdot B) \cdot (B' \cdot A') = A \cdot (B \cdot B') \cdot A' = A \cdot E_n \cdot A' = A \cdot A' = E_n$$

sowie

$$(B' \cdot A') \cdot (A \cdot B) = B' \cdot (A' \cdot A) \cdot B = B' \cdot E_n \cdot B = B' \cdot B = E_n$$

also gilt $A \cdot B \in \mathrm{GL}(n, K)$. Wir haben hier schon mehrmals das Assoziativgesetz verwendet, weil es einfach im Ring $\mathrm{M}(n \times n, K)$ gilt. Damit gilt es naürlich auch in der Teilmenge $\mathrm{GL}(n, K)$, d.h., das Gruppenaxiom G1 ist erfüllt. Ebenfalls ist $E_n$ das neutrale Element (wie auch im Ring $\mathrm{M}(n \times n, K)$), also gilt G2 und das Axiom G3 gilt nach Definition, denn alle Matrizen in $\mathrm{GL}(n, K)$ haben ja gerade die Eigenschaft, ein bezüglich der Matrizenmultiplikation inverses Element zu besitzen. □

Ein leichte Konsequenz dieser Aussage ist, dass das Inverse einer Matrix $A$ eindeutig bestimmt ist, denn das ist in jeder Gruppe so (siehe Lemma 3.3). Daher schreiben wir wieder $A^{-1}$ für dieses Inverse, und es gilt dann

$$(A^{-1})^{-1} = A \qquad \text{und} \qquad (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Auf der Menge der quadratischen Matrizen können wir die Operation der Transposition (also das Vertauschen von Zeilen und Spalten) betrachten, und es ist klar, dass wir dabei wieder eine quadratische Matrix behalten. Das nächste Lemma besagt, dass sogar die Teilmenge $\mathrm{GL}(n, K)$ bei dieser Operation erhalten bleibt.

**Lemma 5.27.** *Sei $A \in M(n \times n, K)$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

1. *$A \in GL(n, K)$,*
2. *${}^tA \in GL(n, K)$,*

3. *Spaltenrang*$(A) = n$,

4. *Zeilenrang*$(A) = n$.

*Beweis.* 1. $\Longleftrightarrow$ 2. Sei $A$ invertierbar, d.h., es gibt $A^{-1}$ mit $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E_n$. Dann folgt ${}^t(A^{-1}) \cdot {}^tA = {}^t(A \cdot A^{-1}) = {}^tE_n = E_n$ und analog ${}^tA \cdot {}^t(A^{-1}) = {}^t(A^{-1} \cdot A) = {}^tE_n = E_n$, also folgt ${}^tA \in \mathrm{GL}(n, K)$. Das gleiche Argument funktioniert in die andere Richtung, d.h., aus ${}^tA \in \mathrm{GL}(n, K)$ folgt $A \in \mathrm{GL}(n, K)$, indem wir einfach mit der Matrix $B := {}^tA$ starten, und die eben gemachte logische Argumentation auf $B$ anwenden.

1. $\Longleftrightarrow$ 3. Nach Definition 4.29 ist Spaltenrang$(A) = \dim(\mathrm{Im}(A))$, wobei wir hier $A$ als lineare Abbildung von $K^n$ nach $K^n$ auffassen. Dann folgt aus der Dimensionsformel, dass $A$ injektiv ist genau dann, wenn $\dim(\mathrm{Im}(A)) = n$ ist, aber andererseits ist $\dim(\mathrm{Im}(A)) = n$ auch dazu äquivalent, dass $A$ surjektiv ist, wegen Korollar 4.21.

2. $\Longleftrightarrow$ 4. Wir wenden einfach die gleiche Argumentation wie beim Beweis der Äquivalenz 1. $\Longleftrightarrow$ 3. auf die Matrix ${}^tA$ an.

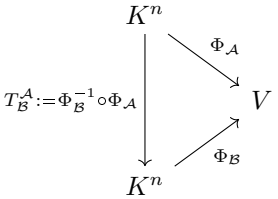
□

## 5.5 Koordinatentransformationen

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, dass sich jede lineare Abbildung durch eine Matrix beschreiben lässt, welche allerdings von der Wahl von Basen im Ausgangs- und Zielvektorraum der linearem Abbildung abhängt. Nun wollen wir der naheliegenden Frage nachgehen, wie sich diese Matrix ändert, wenn man von den gewählten zu neuen Basen übergeht.
Zunächst führen wir den in sehr vielen Bereichen der Mathematik relevanten Begriff des *Koordinatensystems* ein.

**Definition 5.28.** *Sei $V$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum, und $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von $V$. Dann heißt der nach Korollar 5.16 eindeutig bestimmte Isomorphismus $\Phi_{\mathcal{A}} : K^n \to V$ ein (durch die Basis $\mathcal{A}$ festgelegtes) Koordinatensystem für $V$. Für einen gegebenen Vektor $v \in V$ sei $x = (x_1, \ldots, x_n) := \Phi_{\mathcal{A}}^{-1}(v) \in K^n$ (d.h. $v = x_1 \cdot v_1 + \ldots + x_n \cdot v_n$), dann heißt das Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ die Koordinaten des Vektors $v$.*

Zur Abkürzung sagt man häufig, dass man ein Koordinatensystem $(x_1, \ldots, x_n)$ betrachtet, gemeint ist damit immer, dass eine gewisse Basis $\mathcal{A}$ gewählt wird, so dass $(x_1, \ldots, x_n) = \Phi_{\mathcal{A}}^{-1}(v)$ für ein $v \in V$ gilt.
Sei nun eine weitere Basis $\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_n)$ von $V$ gegeben. Dann haben wir das folgende kommutative Diagramm




(5.5)

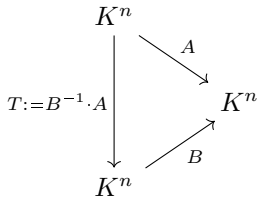
Wie wir weiter oben in Korollar 5.16, 2., gesehen haben, ist jede lineare Abbildung zwischen $K^n$ und $K^n$ durch Multiplikation mit einer (quadratischen) Matrix gegeben, welche wir zur Vereinfachung auch mit $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ bezeichnen. $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ heißt Koordinatentransformation oder Transformationsmatrix. Da $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{A}}$ gilt, und da die linearen Abbildungen $\Phi_{\mathcal{B}}$ und $\Phi_{\mathcal{A}}$ Isomorphismen, d.h. invertierbar sind, ist auch $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ invertierbar, d.h., es gilt $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \in \mathrm{GL}(n, K)$. Ganz konkret kann man die Matrix $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ mit Hilfe des eben eingeführten Begriffs des Koordinatensystems so beschreiben: Sei $v \in V$ gegeben, seien $(x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ die Koordinaten von $v$ bezüglich der Basis $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ und seien analog $(y_1, \ldots, y_n)$ die Koordinaten von $v$ bezüglich $\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_n)$. Konkret heisst das:

$$x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n = v = y_1 w_1 + \ldots + y_n v_n$$

Dann gilt

$$T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Dies erklärt den Namen Koordinatentransformation, man kann mit Hilfe von $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ aus den gegebenen Koordinaten $(x_1, \ldots, x_n)$ neue Koordinaten $(y_1, \ldots, y_n)$ berechnen.
In der Praxis muss man natürlich ein Verfahren finden, wie man die Transformationsmatrix $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ berechnen kann. Hierzu betrachten wir zunächst einen Spezialfall: Sei $V = K^n$, und schreiben wir die Basisvektoren in $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ als Spaltenvektoren, dann können wir diese jeweils in Matrizen $A$ und $B$ eintragen, und dann gilt $A, B \in \mathrm{GL}(n, K)$. Das obige Diagramm sieht dann so aus



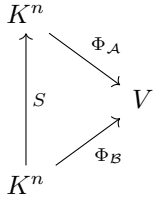

Hier können wir also aus den Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ (genauer, aus den Spaltenvektoren, welche die Elemente der Basen sind) direkt die Transformationsmatrix $T$ ausrechnen. Eine weitere Vereinfachung tritt ein, wenn die Basis $\mathcal{A}$ von $K^n$ einfach die Standardbasis ist, denn dann folgt $A = E_n$, also ist dann $T = B^{-1}$.
Jetzt kehren wir wieder zum allgemeinen Fall eines beliebigen Vektorraumes $V$ mit Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zurück. Hier können wir die Transformationsmatrix zunächst nicht direkt ablesen, denn die Elemente von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sind abstrakte Vektoren (und nicht Spaltenvektoren in $K^n$, wie eben im Spezialfall). Stattdessen gehen wir so vor: Für alle $j$ lässt sich $w_j$ auf eindeutige Weise als Linearkombination

$$w_j = s_{1j} v_1 + \ldots + s_{nj} v_n \tag{5.6}$$

schreiben. Die Koeffizienten liefern uns eine Matrix $S = (s_{ij}) \in \mathrm{M}(n \times n, K)$. Es gilt dann

$$\Phi_{\mathcal{B}} = \Phi_{\mathcal{A}} \circ S$$

(wobei wir hier wieder die Matrix $S$ mit der linearen Abbildung von $K^n$ auf sich selbst, gegeben durch Linksmultiplikation mit $S$ bezeichnen). Diese Gleichung ist eine Gleichheit von Elementen von $\mathrm{Hom}_K(K^n, V)$, d.h., zum Nachweis ihrer Gültigkeit muss man zeigen, dass für alle Vektoren $x \in K^n$ gilt, dass $\Phi_{\mathcal{B}}(x) = \Phi_{\mathcal{A}}(S \cdot x))$ gilt. Wegen der Linearität dieser Abbildung reicht es aber, dies für den Fall $x = e_i$, also für die Standardbasisvektoren von $K^n$ zu zeigen. Dann ist die Aussage aber klar, denn $\Phi_{\mathcal{B}}(e_j) = w_j$, und $S \cdot e_j = {}^t(s_{1j} \ \ldots \ s_{nj})$, also $\Phi_{\mathcal{A}}(S \cdot e_j) = w_j$, wegen Formel (5.6). Wir erhalten also wieder ein kommutatives Diagramm, nämlich

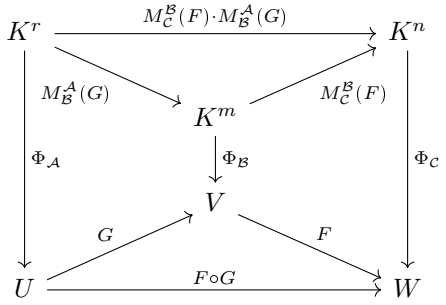



Also gilt $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = S^{-1}$. Damit ist klar, wie die Transformationsmatrix $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ bestimmt wird, wenn man weiß, wie man Matrizen invertiert. Dies werden wir im Abschnitt 5.7 und in Kapitel 6 behandeln.
Für den nächsten wichtigen Satz benötigen wir zunächst eine Vorbereitung.

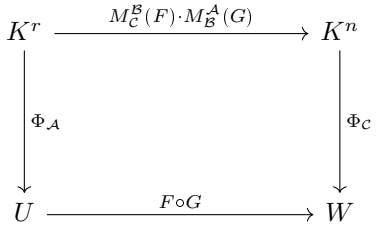
**Lemma 5.29.** *Seien $U, V, W$ endlich-dimensionale Vektorräume. Diese haben die Basen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$. Desweiteren seien lineare Abbildungen $F : V \to W$ und $G : U \to V$ gegeben. Dann gilt*

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}}(F \circ G) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(G)$$

*Beweis.* Wir geben einen abstrakten Beweis, der eine umständliche Rechnung vermeidet. Betrachte wieder das folgende Diagramm




Dass die oberste Zeile, also die lineare Abbildung von $K^r$ nach $K^n$ wirklich durch Multiplikation mit der Matrix $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(G)$ gegeben wird, ist genau der Inhalt von Lemma 5.21. Damit ist das obere Dreieck kommutativ. Das rechte und das linke Parallelogramm sind genau die Rechtecke, welche im Lemma 5.18 vorkommen, und daher sind sie auch kommutativ. Dies beweist, dass das gesamte Diagramm kommutativ ist, insbesondere kommutiert also das äußere Rechteck




und dies bedeutet (wiederum nach Lemma 5.18), dass gilt

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}}(F \circ G) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(G)$$

□

Mit ähnlichen Techniken können wir jetzt den wichtigsten Satz dieses Abschnittes beweisen.

**Satz 5.30** (Transformationsformel)**.** *Seien $V$ und $W$ Vektorräume mit $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$ und sei $F \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$. Seien Basen $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ bzw. $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ von $V$ bzw. $W$ gegeben, und seien wie vorher $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$ bzw. $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{A}'}(F)$ die die Abbildung $F$ bezüglich der Basen $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$ darstellenden Matrizen. Seien weiterhin $T_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{A}} \in GL(n, K)$ bzw. $T_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \in GL(m, K)$ die Transformationsmatrizen (wie in am Anfang dieses Abschnittes definiert). Dann gilt*

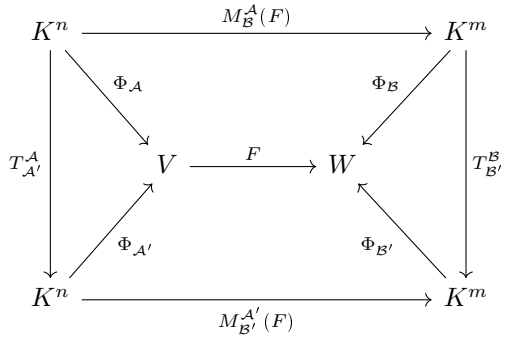
$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{A}'}(F) = T_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F) \cdot (T_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{A}})^{-1}.$$

Zum besseren Merken der Transformationsregel, die in dem obigen Satz steckt, kann man die darin auftretenden Matrizen mit einfacheren Buchstaben bezeichnen: Sei $A := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$ und $B := M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{A}'}(F)$ und seien $T := T_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{A}}$ und $S := T_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ die Transformationsmatrizen, dann gilt

$$B = S \cdot A \cdot T^{-1}.$$

Für den Spezialfall eines Endomorphismus $F \in \mathrm{End}_K(V)$ gilt mit $A := M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(F)$, $B := M_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{A}'}(F)$ (wobei hier $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ wieder Basen von $V$ sind) und $S := T_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{A}}$, dass $B = S \cdot A \cdot S^{-1}$ ist.

*Beweis.* Erneut kann man die Aussage durch Hinschreiben eines Diagramms zeigen. Wir haben nämlich




(5.7)

die Parallelogramme sind wieder die Rechtecke aus Lemma 5.18 und daher kommutativ, die Dreiecke sind kommutativ aufgrund der Definition der Transformationsmatrizen (siehe Diagramm (5.5)). Daher kommutiert das gesamte Diagramm, und dies bedeutet gerade, dass

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{A}'}(F) = T_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \cdot (T_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{A}})^{-1}.$$

gilt. □

Die folgende Konsequenz ist außerordentlich wichtig, und zeigt, dass die bisher aufgebaute abstrakte Theorie auch ganz konkrete Anwendungen hat. Wir werden diese Aussage im nächsten Abschnitt über Gleichungssysteme benötigen.

**Korollar 5.31.** *Sei $A \in M(m \times n, K)$. Dann gilt*

$$\textit{Zeilenrang}(A) = \textit{Spaltenrang}(A).$$

Zur Erinnerung (siehe Definition 4.29): Der Zeilenrang ist die Dimension des von den Zeilen der Matrix $A$ in $K^n$ aufgespannten Untervektorraumes, und analog ist der Spaltenrang die Dimension des von den Spalten von $A$ in $K^m$ aufgespannten Untervektorraumes.

*Beweis.* Wir betrachten $A$ als lineare Abbildung, d.h. als Element von $\mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$. Dann können wir nach Korollar 5.19 Basen $\mathcal{A}$ von $K^n$ und $\mathcal{B}$ von $K^m$ wählen, so dass die darstellende Matrix dieser Abbildung einfacher wird, genauer, so dass gilt

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(A) = B := \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Klar ist, dass $\mathrm{Zeilenrang}(B) = \mathrm{Spaltenrang}(B)$ gilt. Andererseits sagt die Transformationsformel (Satz 5.30) aus, dass es Matrizen $T \in \mathrm{GL}(n, K)$ und $S \in \mathrm{GL}(m, K)$ mit

$$B = S \cdot A \cdot T^{-1}$$

gibt. Wir müssen also nur zeigen, dass $\mathrm{Spaltenrang}(A) = \mathrm{Spaltenrang}(B)$ und $\mathrm{Zeilenrang}(A) = \mathrm{Zeilenrang}(B)$ gilt. Dies folgt aus dem nächsten Lemma. □

**Lemma 5.32.** *Seien $X \in GL(n, K)$, $Y \in GL(m, K)$ und $A \in M(m \times n, K)$. Dann gilt*

$$\textit{Spaltenrang}(A) = \textit{Spaltenrang}(Y \cdot A \cdot X) \qquad \textit{und} \qquad \textit{Zeilenrang}(A) = \textit{Zeilenrang}(Y \cdot A \cdot X)$$

*Beweis.* Da das Lemma für alle $X, A, Y$ gelten soll, ist klar, dass wir nur die erste Aussage beweisen müssen, denn die zweite folgt aus der ersten durch Transposition. Jetzt bemerken wir, dass der Spaltenrang einer Matrix nichts anderes ist als der Rang der linearen Abbildung, welche durch (Links)multiplikation mit dieser

Matrix gegeben ist. Für jede lineare Abbildung $F$ gilt aber $\mathrm{rk}(F) = \mathrm{rk}(F \circ P) = \mathrm{rk}(Q \circ F)$, falls $P$ und $Q$ invertierbare lineare Abbildungen sind. Also folgt

$$\dim(\mathrm{Im}(A)) = \dim(\mathrm{Im}(YAX))$$

und damit ist das Lemma bewiesen. □

Die Transformationsformel weiter oben erlaubt es, Matrizen „einzuteilen“, nämlich danach, ob sie (bezüglich gewisser Basen) die gleiche lineare Abbildung repräsentieren. Dies fasst man in den folgenden Begriffen zusammen.

**Definition-Lemma 5.33.** *Zwei Matrizen $A, B \in M(m \times n, K)$ heißen äquivalent, falls es $S \in GL(m, K)$ und $T \in GL(n, K)$ mit $B = S \cdot A \cdot T^{-1}$ gibt. Falls $n = m$ ist, dann heißen $A$ und $B$ ähnlich, falls nur eine Matrix $S \in GL(n, K)$ existiert mit $B = S \cdot A \cdot S^{-1}$. Es gilt dann*

1. *Zwei Matrizen $A, B \in M(m \times n, K)$ sind äquivalent genau dann, falls sie bezüglich zweier Paare von Basen die gleiche lineare Abbildung von $K^n$ nach $K^m$ repräsentieren.*
2. *Zwei Matrizen $A, B \in M(n \times n, K)$ sind ähnlich, falls sie bezüglich zweier Basen von $K^n$ den gleichen Endomorphismus von $K^n$ repräsentieren.*
3. *Zwei Matrizen $A, B \in M(m \times n, K)$ sind äquivalent genau dann, wenn $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(B)$ ist.*

*Beweis.* Die ersten beiden Aussagen folgen direkt aus dem bisher bewiesenen (insbesondere aus der Transformationsformel, Satz 5.30). Für die letzte Aussage bemerke man zunächst, dass die Relation „Zwei Matrizen sind äquivalent“ natürlich eine Äquivalenzrelation ist (daher der Name) und dass eine Matrix vom Rang $r$ immer zu der Matrix

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

äquivalent ist, dies haben wir bereits im Beweis von Korollar 5.31 bemerkt (und es folgt aus Korollar 5.19). □

Es sei noch bemerkt, dass zwei quadratische Matrizen natürlich auch äquivalent sind, genau dann, wenn ihr Rang gleich ist, dass sie aber deshalb noch lange nicht ähnlich zueinander sein müssen. Wann das passiert, ist eine viel schwierigere Frage, mit der wir uns später im Kapitel **??** befassen werden.

## 5.6 Matrizen und lineare Gleichungssysteme

Wir wollen jetzt mit der aufgebaute Theorie die im ersten Kapitel untersuchten Systeme von linearen Gleichungen noch einmal von einem abstrakten Standpunkt aus diskutieren. Zuerst definieren wir noch einmal präzise, was wir unter einem Gleichungssystem verstehen.

**Definition 5.34.** *Sei $K$ ein Körper, sei $A \in M(m \times n, K)$ und sei $b = {}^t(b_1, \ldots, b_m) \in M(m \times 1, K)$ ein Spaltenvektor. Sei $x = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$ ein Spaltenvektor (der Länge $n$) von Unbekannten. Dann heißt das System*

$$A \cdot x = b,$$

*oder, ausgeschrieben*

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11} \cdot x_1 & + & a_{12} \cdot x_2 & + & \ldots + a_{1n} \cdot x_n & = & b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 & + & a_{22} \cdot x_2 & + & \ldots + a_{2n} \cdot x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & \\ a_{m1} \cdot x_1 & + & a_{m2} \cdot x_2 & + & \ldots + a_{mn} \cdot x_n & = & b_m \end{array}$$

*das zu $A$ und $b$ gehörige* inhomogene *Gleichungssystem. Das dazugehörige homogene Gleichungssystem ist*

$$A \cdot x = 0$$

*ausgeschrieben:*

$$\begin{array}{rcrcrcl} a_{11}\cdot x_1 & + & a_{12}\cdot x_2 & + & \ldots + a_{1n}\cdot x_n & = & 0 \\ a_{21}\cdot x_1 & + & a_{22}\cdot x_2 & + & \ldots + a_{2n}\cdot x_n & = & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ a_{m1}\cdot x_1 & + & a_{m2}\cdot x_2 & + & \ldots + a_{mn}\cdot x_n & = & 0 \end{array}$$

*Die Mengen* $L\ddot{o}s(A,b) := \{x \in K^n \mid Ax = b\}$ *bzw.* $L\ddot{o}s(A,0) := \{x \in K^n \mid Ax = 0\}$ *heißen die zum inhomogenen bzw. homogenen System gehörigen Lösungsräume.*

Betrachten wir die durch die Matrix $A$ gegebene lineare Abbildung

$$\begin{array}{rcl} F : K^n & \longrightarrow & K^m \\ x & \longmapsto & A\cdot x \end{array}$$

dann gilt offensichtlich

$$\text{Lös}\,(A,b) = F^{-1}(b) \qquad \text{und} \qquad \text{Lös}\,(A,0) = F^{-1}(0) = \ker(F)$$

woraus wir direkt folgende Aussage ableiten können.

**Satz 5.35.** *Sei wie oben ein inhomogenes System* $A\cdot x = b$ *mit* $A \in M(m\times n, K)$ *und* $b \in M(m\times 1, K)$ *gegeben und sei* $r := \text{rk}(A)$*. Dann gilt*

1. $L\ddot{o}s\,(A,0)$ *ist ein Untervektorraum von* $K^n$ *der Dimension* $n-r$*,*
2. $L\ddot{o}s\,(A,b)$ *entweder die leere Menge oder ein affiner Unterraum von* $K^n$ *der Dimension* $n-r$*,*
3. *Sei* $v \in L\ddot{o}s\,(A,b)$ *eine beliebige Lösung des inhomogenen Systems, dann gilt*

$$L\ddot{o}s\,(A,b) = v + L\ddot{o}s\,(A,0).$$

*Man nennt in dieser Situation* $v$ *eine* spezielle Lösung *des inhomogenen Systems.*

Kurz zusammengefasst kann man sagen, dass eine allgemeine Lösung des inhomogenen Systems (falls es überhaupt welche gibt, d.h., falls $\text{Lös}\,(A,b) \neq \varnothing$ ist) durch Addition einer speziellen Lösung dieses Systems und einer allgemeinen Lösung des homogenen Systems erhalten kann.
Wir haben im Kapitel 1 (für den Fall $K = \mathbb{R}$) bereits ein Kriterium zur Lösbarkeit eines Gleichungssystems gefunden, unter Verwendung des Gauß-Algorithmus. Hier wollen wir dieses Kriterium noch einmal etwas abstrakter formulieren. Wir bezeichnen wie im Kapitel 1 mit $(A,b) \in \text{M}(m\times(n+1), K)$ die erweiterte Koeffizientenmatrix des zu $A, b$ gehörenden inhomogenen Systems. Ist $r = \text{rk}(A)$, dann muss natürlich

$$r \leqslant \text{rk}(A,b) \leqslant r+1$$

gelten, denn die Matrix $(A,b)$ hat genau eine Spalte mehr als $A$. Dann gilt

**Satz 5.36.** *Das inhomogene System* $A\cdot x = b$ *hat genau dann eine Lösung (d.h., es ist* $L\ddot{o}s\,(A,b) \neq \varnothing$*), falls gilt*

$$\text{rk}(A) = \text{rk}(A,b).$$

*Beweis.* Wir haben weiter oben schon bemerkt, dass $\text{Lös}\,(A,b) = F^{-1}(b)$ gilt, wobei $F$ die durch $A$ gegebene lineare Abbildung $F : K^n \to K^m; x \mapsto A\cdot x$ ist. Daher ist $\text{Lös}\,(A,b) \neq \varnothing$ genau dann, wenn $b \in \text{Im}(F)$ liegt. Sei andererseits $F' : K^{n+1} \to K^m; y \mapsto (A,b)\cdot y$ die durch die Matrix $(A,b)$ gegebene lineare Abbildung. Dann ist $F'(e_1) = a_1, \ldots, F'(e_n) = a_n$, wenn $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasisvektoren in $K^n$ und $a_1, \ldots, a_n$ die Spalten der Matrix $A$ sind. Da die Spalten von $A$ ein Erzeugendensystem von $\text{Im}(F)$ sind, folgt, dass $\text{Im}(F) \subset \text{Im}(F')$ gilt. Wegen $F'(e_{n+1}) = b$ ist $\text{Im}(F) = \text{Im}(F')$ genau dann, wenn $b \in \text{Im}(F)$ gilt, also nach dem oben Gesagten genau dann, wenn $\text{Lös}\,(A,b) \neq \varnothing$ ist. Da aber immer $\text{Im}(F) \subset \text{Im}(F')$ gilt, ist die Gleichheit $\text{Im}(F) = \text{Im}(F')$ zu $\text{rk}(A) = \text{rk}(F) = \dim_K(\text{Im}(F) = \dim_K(\text{Im}(F')) = \text{rk}(F') = \text{rk}(A,b)$ äquivalent. □

Als Konsequenz erhalten wir einen neuen Beweis der schon in Kapitel 1 gefundenen Kriteriums zur Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen.

**Korollar 5.37.** *Sei $A \in M(m \times n, K)$ in Zeilenstufenform mit $\mathrm{rk}(A) = r$. Dann hat das inhomogene System $A \cdot x = b$ Lösungen genau dann, wenn die „unteren" Komponenten von $b$ verschwinden, d.h., wenn gilt: $b_{r+1} = \ldots = b_m = 0$.*

*Beweis.* Da für die beiden Matrizen $A$ und $(A, b)$ die Formel „Zeilenrang=Spaltenrang" (siehe Lemma 5.31) gilt, haben wir $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A, b)$ genau dann, wenn der Zeilenrang von $(A, b)$ gleich $r$ ist. Da aber $A$ in Zeilenstufenform ist, d.h. insbesondere die unteren $m - r$ Zeilen von $A$ nur Nullen enthalten, ist dies genau dann der Fall, wenn $b_{r+1} = \ldots = b_m = 0$ gilt. □

Der folgende Satz lässt sich exakt wie in Kapitel 1 zeigen, weswegen wir hier auf den Beweis verzichten.

**Satz 5.38.** *Sei $A \in M(m \times n, K)$ und $b \in M(m \times 1, K)$. Dann lässt sich $A$ durch Zeilenumformungen in Zeilenstufenform $\widetilde{A}$ bringen, und wenn der konstante Vektor $b$ dabei zu dem Vektor $\widetilde{b}$ mit umgeformt wird, dann gilt*

$$L\ddot{o}s\,(A, b) = L\ddot{o}s\,(\widetilde{A}, \widetilde{b}).$$

Wir wollen nun noch den in Kapitel 1 gefundenen Begriff der Parametrisierung der Lösung eines linearen Gleichungssystems präzisieren. Wir nehmen dazu an, dass wir eine Matrix $A$ in Zeilenstufenform gegeben haben, zusammen mit einem Vektor $b \in \mathrm{M}(m \times 1, K)$, so dass $\mathrm{Lös}\,(A, b) \neq \varnothing$ ist. Desweiteren nehmen wir an, dass die Pivotelemente in hintereinanderfolgenden Spalten auftreten, d.h., dass mit der Notation von Definition 1.1 gilt $j_i = i$ für alle $i = 1, \ldots, r$. Dies kann man, wie schon früher besprochen, durch Umordnen der Spalten (dies entspricht einem Umnummerieren der Variablen) immer erreichen. Konkreter haben wir dann

$$(A, b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & & & & b_1 \\ & a_{22} & & & b_2 \\ & & a_{33} & & b_3 \\ \mathbf{0} & & \ddots & & \vdots \\ & & & a_{rr} & b_r \\ & & & & 0 \\ & & & & \vdots \\ & & & & 0 \end{array}\right)$$

Wir wiederholen noch einmal das Verfahren zur Bestimmung einer Parametrisierung der Menge $\mathrm{Lös}\,(A, b)$: Man wähle Parametervariablen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, mit $k = n - r$ und setzte $x_{r+1} = \lambda_1, \ldots, x_n = \lambda_k$. Dann lautet die $r$-te Gleichung des Systems

$$a_{rr}x_r + a_{r\,r+1}\lambda_1 + \ldots + a_{rn}\lambda_k = b_r$$

Da $a_{rr}$ ein Pivotelement ist, gilt $a_{rr} \neq 0$, also folgt

$$x_r = \frac{1}{a_{rr}}\left(b_r - a_{r\,r+1}\lambda_1 - \ldots - a_{rn}\lambda_k\right) \tag{5.8}$$

Jetzt definieren wir $d_{ir} := 0$ für $i = 1, \ldots, r-1$ und $d_{rr} := 1/a_{rr}$, sowie $c_{r\,i} := -a_{r\,r+i}/a_{rr}$ für $i = 1, \ldots, k$, dann schreibt sich diese Gleichung als

$$x_r = d_{rr}b_r + c_{r1}\lambda_1 + \ldots + c_{rk}\lambda_k = \sum_{i=1}^{r} d_{ri}b_i + \sum_{i=1}^{k} c_{ri}\lambda_i.$$

Die $r-1$-te Gleichung des Systems lautet

$$a_{r-1\,r-1}x_{r-1} + a_{r-1\,r}x_r + a_{r-1\,r+1}\lambda_1 + \ldots + a_{r-1\,n}\lambda_k = b_{r-1}$$

Wegen $a_{r-1\,r-1} \neq 0$ kann diese wieder nach $x_{r-1}$ umstellen, und dabei die Gleichung (5.8) für $x_r$ einsetzen. Dann erhält man einen Ausdruck der Form

$$x_{r-1} = d_{r-1\,r-1}b_{r-1} + d_{rr}b_r + c_{r-1,1}\lambda_1 + \dots c_{r-1,k}\lambda_k$$

wobei sich die neuen Koeffizienten $d_{r-1\,i}$ und $c_{r-1\,i}$ aus den Einträgen der Matrix $A$ und dem Vektor $b$ ergeben. Führen wir das Lösungsverfahren jetzt weiter durch, so erhalten wir Matrizen

$$D' := (d_{ij}) \in \mathrm{M}(r \times r, K) \qquad \text{und} \qquad C' := (c_{ij}) \in \mathrm{M}(r \times k, K).$$

Wir ergänzen diese Matrizen zu größeren Matrizen

$$C := \begin{pmatrix} C' \\ E_k \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(n \times k, K) \qquad \text{und} \qquad D := \begin{pmatrix} D' \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(n \times r, K)$$

Wir geben den dadurch gegebenen linearen Abbildungen Bezeichnungen:

$$\begin{array}{rcl} \varphi : K^r & \longrightarrow & K^n \\ b & \longmapsto & D \cdot b \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{rcl} \Phi_0 : K^k & \longrightarrow & K^n \\ \lambda & \longmapsto & C \cdot \lambda \end{array}$$

Wir definieren für alle $b = {}^t(b_1, \dots, b_r) \in K^r$ die Abbildung (welche im Allgemeinen nicht linear ist):

$$\begin{array}{rcl} \Phi_b : K^k & \longrightarrow & K^n \\ \lambda & \longmapsto & \varphi(b) + \Phi_0(\lambda) \end{array}$$

Setzt man $b$ auf Null, dann ist $\varphi(b) = 0$ (da $\varphi$ linear ist), und man erhält die vorher erklärte Abbildung $\Phi_0$. Man beachte auch, dass $\Phi_0$ injektiv ist, da die Spalten der Matrix $C$ linear unabhängig sind. Man bemerke, dass bei der Definition von $\varphi$ und von $\Phi_b$ ein Vektor $b \in K^r$ betrachtet wird, während vorher der konstante Vektor des Gleichungssystems ein Element von $K^m$ war. Allerdings hatten wir vorausgesetzt, dass die letzten $m - r$ Komponenten dieses Konstantenvektors gleich Null sind, d.h., wir können diesem Vektor eindeutig ein Element aus $K^r$ zuordnen, welches wir auch $b$ nennen. Dann gelten folgende Aussagen.

**Satz 5.39.** *1. Für alle $b \in K^r$ und für alle $\lambda \in K^k$ gilt $\Phi_b(\lambda) \in$ Lös$\,(A, b)$.*

*2.* $\mathrm{Im}(\Phi_b)$ *ist ein affiner Unterraum von $K^n$ der Dimension $k$, und daher ist* $\mathrm{Im}(\Phi_b) =$ *Lös$\,(A, b)$.*

*3. Es ist* $\mathrm{Im}(\Phi_0) =$ *Lös$\,(A, 0)$, also ist $\Phi_0$ ein Vektorraumisomorphismus von $K^k$ nach Lös$\,(A, 0)$ und $\Phi_b$ ist für alle $b \in K^r$ eine bijektive Abbildung von $K^k$ nach Lös$\,(A, b)$.*

*Beweis.* 1. Dies gilt nach Konstruktion der Matrizen $D$ und $C$ (siehe die Rechnung oben zur Bestimmung der Koeffizienten $d_{ij}$ und $c_{ij}$).

2. $\mathrm{Im}(\Phi_b)$ ist nach Definition ein affiner Unterraum, denn es gilt $\mathrm{Im}(\Phi_b) = \varphi(b) + \mathrm{Im}(\Phi_0)$, und $\mathrm{Im}(\Phi_0) \subset K^n$ ist ein Untervektorraum der Dimension $k$, da $\Phi_0$ injektiv ist. Das Korollar 4.21 gilt auch für affine Unterräume, und da wir in 1. schon gesehen haben, dass $\mathrm{Im}(\Phi_b) \subset$ Lös$\,(A, b)$ gilt, folgt die Gleichheit zwischen diesen.

3. Das $\mathrm{Im}(\Phi_0) =$ Lös$\,(A, 0$ ist, folgt einfach aus 2. im Spezialfall $b = 0$. Wenn aber $\Phi_0 : K^k \to$ Lös$\,(A, 0)$ ein Isomorphismus ist, also insbesondere bijektiv, dann ist natürlich $\Phi_b$ immer noch bijektiv.

□

Zum Abschluss dieses Abschnitts führen wir noch einen Begriff ein, den wir nicht unbedingt brauchen, der aber in sehr vielen mathematischen Texten, welche lineare Gleichungssysteme benötigen, vorkommt.

**Definition 5.40.** *Seien $A, b$ wie oben, und sei $w_1, \dots, w_k \in K^n$ eine Basis von Lös$\,(A, 0)$. Dann heisst $(w_1, \dots, w_k)$ ein* Fundamentalsystem von Lösungen *des homogenen Systems $A \cdot x = 0$. Ein beliebiger Vektor $v \in$ Lös$\,(A, b)$ heißt* spezielle Lösung *des inhomogenen Systems $A \cdot x = b$.*

Wie schon oben erwähnt, ist die allegemeine Lösung des inhomogenen Systems durch Addition einer speziellen Lösung zur Fundametallösung (des homogenen Systems) gegeben, d.h., es gilt

$$\text{Lös}\,(A,b) = v + Kw_1 + \ldots + Kw_k = v + \text{Span}_K(w_1,\ldots,w_k) = v + \text{Lös}\,(A,0).$$

Um die eingeführten Begriffe und Konstruktionen zu illustrieren, kehren wir noch einmal zu dem in Kapitel 1 behandelten Beispiel (nach Satz 1.3) zurück. Wir ordnen die Spalten der Matrix allerdings anders an, so dass die Pivotelemente der Zeilenstufenform die oben erwähnte Vereinfachung $j_i = i$ erfüllen. Sei also

$$(A,b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 9 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 9 & 5 & 1 \\ 6 & 7 & 9 & 8 & 2 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 0 \end{array}\right)$$

Die Zeilenstufenform ist

$$(\widetilde{A},\widetilde{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{3} & 4 & 9 & 5 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 9 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{9} & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

und in Kapitel 1 hatten wir schon die Parametrisierung

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ \lambda & \longmapsto & \begin{pmatrix} \lambda - \frac{8}{3} \\ 3 - 2\lambda \\ -\frac{1}{3} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{3} \\ 3 \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

berechnet. Dann gilt

$$\begin{array}{rcl} \Phi_0 : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ \lambda & \longmapsto & \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

und $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ ist durch Multiplikation mit der Matrix

$$D := \begin{pmatrix} 1/3 & -4/3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Hier besteht die Fundamentallösung nur aus einem Vektor (nämlich ${}^t(1\ -2\,0\,1)$, und nur für bestimmte $b = {}^t(b_1,b_2,b_3) \in \mathbb{R}^3$ (bzw. für $b = {}^t(b_1,b_2,b_3,0) \in \mathbb{R}^4$) ist $D \cdot b$ eine spezielle Lösung (nämlich genau für alle ${}^t(b_1,b_2,b_3,0) \in \text{Im}(A)$).
Wir beschliessen diesen Abschnitt mit der Diskussion von zwei wichtigen Spezialfällen.

**Lemma 5.41.** *Sei $A \in M(m \times n, K)$ und $b \in K^m$. Dann sind äquivalent:*

1. *Das inhomogene Gleichungssystem $A \cdot x = b$ ist eindeutig lösbar, d.h., es existiert genau eine Lösung.*
2. $\text{rk}(A) = \text{rk}(A,b) = n$.

*Beweis.* Wir haben in Satz 5.36 schon gesehen, dass die Lösbarkeit von $Ax = b$ zu der Bedingung $\text{rk}(A) = \text{rk}(A,b)$ äquivalent ist. Es ist also noch zu zeigen, dass die Eindeutigkeit zu $\text{rk}(A) = n$ äquivalent ist. Wenn wir aber schon annehmen, dass eine Lösung existiert, dann ist die Eindeutigkeit wegen Satz 5.39 zur Eindeutigkeit des homogenen Systems $Ax = 0$ äquivalent, und diese wiederum bedeutet $\ker(A) = \{0\}$, und wegen der Dimensionsformel (Satz 5.12) heißt dies nichts anderes als $\text{rk}(A) = n$. □

Ist eine der beiden äquivalenten Bedingungen des Lemmas erfüllt, dann heißt das System *eindeutig lösbar*. Falls $m = n$ ist, dann ist $A$ wegen $\mathrm{rk}(A) = n$ surjektiv, also wegen Korollar 5.13 sogar bijektiv, also invertierbar. Dann folgt aus $Ax = b$ einfach $x = A^{-1} \cdot b$, und damit kann man die Lösung berechnen, wenn man nur weiß, wie man $A^{-1}$ berechnet. Dies werden wir im nächsten Kapitel behandeln.
Seien nun $m$ und $n$ wieder allgemein, und betrachten wir den Fall, wo $\mathrm{rk}(A) = m$ gilt. Dann ist die lineare Abbildung $A : K^n \to K^m$ surjektiv, und damit ist jedes $b \in K^m$ ein Element von $\mathrm{Im}(A)$, d.h., für jedes $b \in K^m$ hat das inhomogene System $Ax = b$ ene Lösung. Solch ein System nennt man *universell lösbar*. Im Gegensatz dazu ist bei $\mathrm{rk}(A) < m$ das System nur für spezielle $b \in K^m$ lösbar (nämlich für die, welche in $\mathrm{Im}(A)$ liegen).

## 5.7 Elementarmatrizen

Wir haben in den vorherigen Abschnitten den Begriff der invertierbaren Matrix kennengelernt, und gesehen, dass man viele wichtige Operation auf das Problem zurückführen kann, quadratische Matrizen, welche maximalen Rang haben, zu invertieren. Wir wollen nun erklären, wie man tatsächlich die Inverse einer Matrix, wenn sie denn existiert, berechnen kann. Dabei werden wieder Matrizenumformungen eine große Rolle spielen. Tatsächlich lassen sich sowohl solche Rechenverfahren, als auch theoretische Aspekte leichter behandeln, wenn man Matrizenumformungen durch Multiplikation mit ganz speziellen invertierbaren Matrizen, den sogenannten Elementarmatrizen interpretiert. Wir beginnen mit der entsprechenden Definition.

**Definition 5.42.** *Sei $K$ ein Körper und $\lambda \in K\backslash\{0\}$. Dann definieren wir die folgenden quadratischen Matrizen*

$$S_i(\lambda) := \begin{pmatrix}
1 & & & | & & & | & & & \\
& \ddots & & | & & & | & & & \\
& & 1 & | & & & | & & & \\
- & - & - & \lambda & - & - & 0 & - & - & - \\
& & & | & 1 & & | & & & \\
& & & | & & \ddots & | & & & \\
& & & | & & & 1 & & & \\
- & - & - & 0 & - & - & 1 & - & - & - \\
& & & | & & & | & 1 & & \\
& & & | & & & | & & \ddots & \\
& & & | & & & | & & & 1
\end{pmatrix} \tag{5.9}$$

*Hierbei steht in der $i$-ten Spalte und $i$-ten Zeile der Eintrag $\lambda$, alle anderen Diagonaleinträge sind gleich* 1*, und alle Nicht-Diagonaleinträge sind gleich* 0*. Desweiteren sei:*

$$Q_i^j := \begin{pmatrix}
1 & & & | & & & | & & & \\
& \ddots & & | & & & | & & & \\
& & 1 & | & & & | & & & \\
- & - & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - \\
& & & | & 1 & & | & & & \\
& & & | & & \ddots & | & & & \\
& & & | & & & 1 & & & \\
- & - & - & 0 & - & - & 1 & - & - & - \\
& & & | & & & | & 1 & & \\
& & & | & & & | & & \ddots & \\
& & & | & & & | & & & 1
\end{pmatrix} \tag{5.10}$$

*wobei hier alle Diagonaleinträge gleich* 1 *sind, aber im Eintrag in der* $i$*-ten Zeile und* $j$*-ten Spalte eine* 1 *steht (und alle anderen Einträge gleich Null sind). Eine Variante dieser beiden Matrizen ist die folgende*

$$Q_i^j(\lambda) := \left(\begin{array}{ccccccccccc} 1 & & & | & & & & | & & & \\ & \ddots & & | & & & & | & & & \\ & & 1 & | & & & & | & & & \\ - & - & - & 1 & - & - & - & \lambda & - & - & - \\ & & & | & 1 & & & | & & & \\ & & & | & & \ddots & & | & & & \\ & & & | & & & 1 & | & & & \\ - & - & - & 0 & - & - & - & 1 & - & - & - \\ & & & | & & & & | & 1 & & \\ & & & | & & & & | & & \ddots & \\ & & & | & & & & | & & & 1 \end{array}\right) \tag{5.11}$$

*bei der der* $(j,i)$*-te Eintrag gleich* $\lambda$ *ist. Schliesslich betrachten wir noch die Matrix*

$$P_i^j := \left(\begin{array}{ccccccccccc} 1 & & & | & & & & | & & & \\ & \ddots & & | & & & & | & & & \\ & & 1 & | & & & & | & & & \\ - & - & - & 0 & - & - & - & 1 & - & - & - \\ & & & | & 1 & & & | & & & \\ & & & | & & \ddots & & | & & & \\ & & & | & & & 1 & | & & & \\ - & - & - & 1 & - & - & - & 0 & - & - & - \\ & & & | & & & & | & 1 & & \\ & & & | & & & & | & & \ddots & \\ & & & | & & & & | & & & 1 \end{array}\right) \tag{5.12}$$

*bei der, im Gegensatz zur Matrix* $Q_i^j$ *in den Diagonaleinträgen in der* $i$*-ten und* $j$*-ten Zeile (bzw. Spalte) Nullen stehen, und wieder im Eintrag an der* $(i,j)$*-ten Stelle eine Eins.*
*Alle Matrizen, welche eine der obenstehenden Formen haben, heißen* Elementarmatrizen.

Die Bedeutung dieser Matrizen besteht darin, dass man die im Abschnitt 4.2 (siehe Seite 73) definierten Zeilenumformungen durch sie ausdrücken kann. Genauer gilt das Folgende.

**Lemma 5.43.** *Sei* $A \in M(m \times n, K)$ *und seien* $A'_I, \ldots, A'_{IV}$ *die aus* $A$ *durch Zeilenumformungen des Typs I-IV hervorgegangen Matrizen. Dann gilt*

$$\begin{array}{rclcrcl} A'_I & = & S_i(\lambda) \cdot A & ; & A'_{II} & = & Q_i^j \cdot A \\ A'_{III} & = & Q_i^j(\lambda) \cdot A & ; & A_{IV} & = & P_i^j \cdot A \end{array}$$

*Beweis.* Dies kann man sofort nachrechnen, was Sie als Übungsaufgabe (sowohl zum Verständnis der Matrixmultiplikation als auch der Zeilenumformungen) einmal tun sollten. □

Es sei bemerkt, dass man analog Spaltenumformungen definieren kann, und genauso läßt sich nachrechnen, dass die entsprechenden Operation I-IV sich durch Multiplikation mit den Elementarmatrizen *von rechts* realisieren lassen. Ist also z.B. $(A')^I$ die Matrix, welche aus $A$ durch Multiplikation der $i$-ten *Spalte* mit $\lambda$ entsteht, so gilt $(A')^I = A \cdot S_i(\lambda)$.
Die folgende Aussage entspricht der Tatsache, dass man Zeilen- (bzw. Spalten-) Umformungen „wieder rückgängig“ machen kann, und zwar durch eine weitere Zeilen- (bzw. Spalten-)Umformung.

**Lemma 5.44.** *Alle Elementarmatrizen sind invertierbar, und es gilt*

$$\begin{array}{rclcrcl} (S_i(\lambda))^{-1} & = & S_i(\lambda^{-1}) & ; & (Q_i^j)^{-1} & = & Q_i^j(-1) \\ (Q_i^j(\lambda))^{-1} & = & Q_i^j(-\lambda) & ; & (P_i^j)^{-1} & = & P_i^j \end{array}$$

*Beweis.* Zum Beweis multipliziert man einfach die jeweiligen Elementarmatrizen mit den angegebenen Inversen und prüft, dass man dadurch die Einheitsmatrix erhält. □

Damit können wir den folgenden Satz beweisen, welchen wir benutzen können, um ein Verfahren zur Bestimmung der Inversen einer gegebenen quadratischen Matrix zu finden (falls diese existiert)

**Satz 5.45.** *Sei $A \in GL(n, K)$ eine invertierbare Matrix. Dann läßt sich $A$ als Produkt von Elementarmatrizen schreiben.*

Man beschreibt den durch den Satz ausgedrückten Sachverhalt auch dadurch, dass man sagt: „Die Gruppe $\mathrm{GL}(n, K)$ wird von den Elementarmatrizen erzeugt“.

*Beweis.* Da die Matrix $A$ invertierbar ist, ist ihr Zeilenrang gleich $n$ (siehe Lemma 5.27). Jetzt können wir $A$ durch Zeilenumformungen in Zeilenstufenform bringen, und weil der Rang von $A$ gleich $n$ ist und der Rang bei Zeilenumformungen gleich bleibt, sieht die dadurch erhaltene Matrix $B$ so aus

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

und es alle Diagonalelemente $b_{ii}$ sind ungleich Null. Nach dem letzten Lemma gibt es also Elementarmatrizen $S_1, \dots, S_k$ so dass $B = S_k \cdot \ldots \cdot S_1 \cdot A$ gilt. Nun kann man durch weitere Zeilenumformungen die Matrix $B$ auf Diagonalgestalt bringen, d.h., eine Matrix erzeugen, bei der alle Einträge außerhalb der Diagonalen Null sind. Zum Beipiel kann man das $-b_{1\,n-1}/b_{nn}$-fache der letzen Zeile zur vorletzen addieren, und dadurch wird der Eintrag in der $n-1$-ten Zeile und der $n$-ten Spalte zu Null. Es ist klar, dass bei diesem Verfahren die Diagonaleinträge nicht verändert werden. Sie bleiben alle ungleich Null, und im letzten Schritt kann man durch $n$-faches Anwenden von Umformungen des Typs I (Multiplizieren der $i$-ten Zeile mit $b_{ii}^{-1}$) diese zu Eins machen, d.h., die Matrix $B$ in die Einheitsmatrix $E_n$ umformen. Es gibt also weitere Elementarmatrizen $S_{k+1}, \cdot, S_r$, so dass

$$E_n = S_r \cdot \ldots \cdot S_{k+1} \cdot S_k \cdot \ldots \cdot S_1 \cdot A$$

gilt. Sei jetzt $T_i := S_i^{-1}$, dann ist $T_i$ nach dem letzten Lemma auch eine Elementarmatrix, und es folgt

$$A = T_1 \cdot \ldots \cdot T_r.$$

□

Der Beweis dieses Satzes ist *konstruktiv*, d.h., er zeigt nicht nur auf abstrakte Art und Weise, dass eine gewisse Aussage gilt, sondern er liefert direkt ein Rechenverfahren, in diesem Fall ein Verfahren zur Bestimmung der inversen Matrix einer gegebenen quadratischen Matrix, wobei man am Anfang noch nicht einmal wissen muss, ob die gegebene Matrix überhaupt invertierbar ist, denn das stellt sich im Verlauf des Verfahrens heraus. Kurzgefasst läßt sich das Verfahren so beschreiben:
Man schreibe die gegebene Matrix $A \in \mathrm{M}(n \times n, K)$ und die Einheitsmatrix $E_n$ nebeneinander. Dann führe man an $A$ Zeilenumformungen aus, und in in jedem Schritt wird die gleiche Umformung auch an der Matrix $E_n$ aus geführt. Im ersten Schritt bringe man $A$ auf Zeilenstufenform, dabei kann man den Rang $r$ von $A$ ablesen. Falls $r < n$ ist, sagt uns Lemma 5.27, dass $A$ nicht invertierbar ist, und dann ist das Verfahren beendet (und die schon ausgeführten Zeilenumformungen an $E_n$ waren umsonst). Wenn $r = n$ ist, dann sieht die aus $A$ gewonnene Matrix aus wie die Matrix $B$ im Beweis des letzten Satzes, und genauso führt man dann weitere Umformungen durch, welche $B$ zuerst auf Diagonalgestalt bringen, und schließlich formt man

die entstehende Matrix weiter um, bis man die Einheitsmatrix erhält. Wenn man nun in jedem Schritt an der Matrix, welche aus der Einheitsmatrix $E_n$ gewonnen wurde, die gleichen Umformungen durchführt, wird diese in die Matrix $A^{-1}$ umgeformt. Schematische kann man dies so darstellen

| $A$ | $E_n$ |
|---|---|
| $S_1 \cdot A$ | $S_1 \cdot E_n$ |
| $S_2 \cdot S_1 \cdot A$ | $S_2 \cdot S_1 \cdot E_n$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| $S_r \cdot \ldots \cdot S_1 \cdot A$ | $S_r \cdot \ldots \cdot S_1 \cdot E_n$ |

Falls nun $S_r \cdot \ldots \cdot S_1 \cdot A = E_n$ gilt, dann ist $S_r \cdot \ldots \cdot S_1 \cdot E_n = S_r \cdot \ldots \cdot S_1$ die Matrix $A^{-1}$. Wir illustrieren das Verfahren durch das folgende konkrete Beispiel:

| | | |
|---|---|---|
| | $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ | $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ |
| $Q_1^3(-1)$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ |
| $P_2^3$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ |
| $Q_3^1(-1)$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_n$ | $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A^{-1}$ |

**Bemerkung:** Um die inverse Matrix zu bestimmen, kann man das eben beschriebene Verfahren auch dahingehend abändern, dass man statt Zeilenumformungen nur Spaltenumformungen benutzt, dies entspricht, wie oben schon festgestellt, der Multiplikation von rechts mit Elementarmatrizen. Führt man die gleichen Spaltenumformungen auch an der Einheitsmatrix aus, erhält man am Ende (wenn die Matrix $A$ in die Einheitsmatrix umgeformt wurde), auch die inverse Matrix $A^{-1}$.
Für eine durch eine Matrix $A \in \mathrm{M}(m \times n, K)$ gegebene lineare Abbildung $K^n \to K^m$ gibt es nach Korollar 5.19 Basen $\mathcal{A}$ von $K^n$ und $\mathcal{B}$ von $K^m$ so dass

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(A) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =: B$$

ist (mit $r := \mathrm{rk}(A)$), und aus der Transformationsformel (Satz 5.30) folgt dann, dass es $T \in \mathrm{GL}(n, K)$ und $S \in \mathrm{GL}(m, K)$ gibt mit $B = S \cdot A \cdot T^{-1}$. Mithilfe von Elementarmatrizen kann man nun $T$ und $S$, und damit auch die Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ recht leicht bestimmen, hierbei verwendet man, anders als bei der Bestimmung der Inversen einer quadratischen Matrix *gleichzeitig* Zeilen- und Spaltenumformungen. Konkret: Zunächst bringt man $A$ durch *Zeilenumformungen* in Zeilenstufenform, und führt die analogen Umformungen an der Einheitsmatrix $E_m$ aus, dies entspricht der Multiplikation von links mit Elementarmatrizen $S_1, \ldots, S_r$. Wenn die Matrix $S_r \cdot \ldots \cdot S_1 \cdot A$ in Zeilenstufenform ist, dann kann man diese mit *Spaltenumformungen* in die Matrix $B$ überführen, diese Umformungen führt man gleichzeitig an der Einheitsmatrix $E_n$ aus, sie entsprechen der Multiplikation von rechts mit Elementarmatrizen $T_1, \ldots, T_p$. Am Ende gilt also

$$B = S_r \cdot \ldots \cdot S_1 \cdot A \cdot T_1 \cdot \ldots \cdot T_p$$

d.h., wenn man $S := S_r \cdot \ldots \cdot S_1$ und $T^{-1} := T_1 \cdot \ldots \cdot T_p$ setzt, dann ist $B = S \cdot A \cdot T^{-1}$, und man hat die gesuchten Transformationsmatrizen $S$ und $T$ gefunden (zum Finden von $T$ muss man die zunächst konstruierte Matrix

$T^{-1}$ natürlich noch invertieren). Schematisch stellt sich dieses Verfahren so dar:

| | | |
|---|---|---|
| $E_m$ | $A$ | |
| $S_1 \cdot E_m$ | $S_1 \cdot A$ | |
| $\vdots$ | $\vdots$ | |
| $S_r \cdot \ldots \cdot S_1 \cdot E_m =: S$ | $S_r \cdot \ldots \cdot S_1 \cdot A$ | $E_n$ |
| | $S_r \cdot \ldots \cdot S_1 \cdot A \cdot T_1$ | $E_n \cdot T_1$ |
| | $\vdots$ | $\vdots$ |
| | $S_r \cdot \ldots \cdot S_1 \cdot A \cdot T_1 \cdot \ldots \cdot T_p = B$ | $E_n \cdot T_1 \cdot \ldots \cdot T_p =: T^{-1}$ |

Auch dieses Verfahren wollen wir an einem Beispiel illustrieren:

| | | |
|---|---|---|
| $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ | |
| $S := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ | $E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ |
| | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ |
| | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: T^{-1}$ |

Schlussendlich erhalten wir mit diesem Verfahren Basen $\mathcal{A}$ von $K^n$ und $\mathcal{B}$ von $K^m$, so dass $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(A) = B$ gilt, dazu betrachten wir noch einmal das Basiswechseldiagramm (siehe Diagramm (5.7)) für den Spezialfall, $V = K^n$, $W = K^m$ und dass die Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ jeweils aus den Standardbasisvektoren in $K^n$ und $K^m$ bestehen (so dass die im Diagramm auftretenden Isomorphismen $\Phi_{\mathcal{A}}$ und $\Phi_{\mathcal{B}}$ jeweils die Identität sind). Wir haben dann

$$\begin{array}{ccc} K^n & \xrightarrow{\quad B \quad} & K^m \\ {\scriptstyle T^{-1}}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle S} \\ K^n & \xrightarrow[\quad A \quad]{} & K^m \end{array}$$

Wir sehen, dass die gesuchten Basen $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}$ die Bilder unter $T^{-1}$ bzw. $S^{-1}$ der Standardbasisvektoren von $K^n$ bzw. $K^n$ sind, d.h., es sind nichts anderes als die Spalten von $T^{-1}$ und $S^{-1}$. Um diese Vektoren zu bestimmen, verwendet man also das obige Verfahren, und muss noch die die Matrix $S$ invertieren.

Im obigen Beispiel mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ist $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, und damit haben wir

$$\mathcal{A} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \qquad \text{und} \qquad \mathcal{B} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

und es gilt:

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad A \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{und} \qquad A \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

so dass $B$ in der Tat die darstellende Matrix der durch $A$ gegebenen Abbildung bezüglich der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ist, also $B = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(A)$.

# Kapitel 6

# Determinanten

Wir haben im vorherigen Kapitel ausführlich lineare Abbildungen, lineare Gleichungssysteme und Matrizen behandelt. Der Fall von $n \times n$-Matrizen, bzw. der von Systemen mit gleicher Anzahl von Gleichungen und Variablen bzw. der von linearen Abbildungen zwischen gleich-dimensionalen Vektorräumen kann noch sehr viel genauer untersucht werden. Damit wollen wir uns in diesem Kapitel beschäftigen und insbesondere einer quadratischen Matrix eine Zahl (d.h., ein Körperelement), genannt Determinante zuordnen, mit welcher wir viele Fragen, die im letzten Kapitel untersucht wurden, einfacher beantworten können.

## 6.1 Permutationen

Bevor wir Determinanten definieren können, müssen wir zunächst einen Ausflug in die Gruppentheorie machen. Wir haben am Anfang von Kapitel 3 bereits kurz die Permutationsgruppen $S(M)$ eingeführt, diese werden nun etwas genauer untersucht. Zunächst eine einfache Definition.

**Definition 6.1.** *Sei $n \in \mathbb{N}$ und $M = \{1, 2, \ldots, n\}$, dann heißt die Permutationsgruppe $S(M)$ auch symmetrische Gruppe und wird mit $S_n$ abgekürzt.*

Ein Element einer symmetrischen Gruppe (hier z.B. $S_4$) kann man so schreiben:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in S_4,$$

hierbei soll jeweils das Element $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, welches in der ersten Zeile steht auf das darunter stehende Element $\sigma(i)$ abgebildet werden. Klar ist, dass eine so geschriebene Abbildung eine Permutation ist genau dann, wenn in der zweiten Zeile kein Element doppelt vorkommt. Im allgemeinen schreiben wir also

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix} \in S_n,$$

Dann ist die Verknüpfung zweier Permutationen gegeben durch

$$\begin{aligned} \tau \circ \sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \tau(3) & \ldots & \tau(n) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \tau(\sigma(1)) & \tau(\sigma(2)) & \tau(\sigma(3)) & \ldots & \tau(\sigma(n)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wir könnnen mit dieser Schreibweise die Gruppen $S_n$ für kleine $n$ bereits direkt angeben. Es gilt: $S_1 = \{\mathrm{id}_{\{1\}}\}$ und $S_2 = \{\mathrm{id}_{\{1,2\}}, \tau\}$, mit

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Verknüpfungstabelle für $S_2$ ist sehr einfach, nämlich

| $\circ$ | $\mathrm{id}_{\{1,2\}}$ | $\tau$ |
|---|---|---|
| $\mathrm{id}_{\{1,2\}}$ | $\mathrm{id}_{\{1,2\}}$ | $\tau$ |
| $\tau$ | $\tau$ | $\mathrm{id}_{\{1,2\}}$ |

Daran sieht man, dass es einen Gruppenisomorphismus $(S_2, \circ) \xrightarrow{\cong} (\mathbb{Z}_2, +)$ gibt, welcher $\mathrm{id}_{\{1,2\}}$ auf 0 und $\tau$ auf 1 abbildet. Für $S_3$ hat man schon mehr Möglichkeiten, es ist nämlich $S_3 = \{\mathrm{id}_{\{1,2,3\}}, \tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{13}, \alpha, \beta\}$ mit

$$\tau_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ \tau_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ \tau_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Als Übung berechnen Sie bitte die Verknüpfungstabelle für $S_3$. Sie werden dann sehen, dass $S_3$ nicht abelsch ist, z.B. gilt

$$\tau_{12} \circ \tau_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \tau_{23} \circ \tau_{12}$$

Zur Berechnung dieser Verknüpfungen beachte man, dass die rechts stehende Permutation zuerst angewandt wird, weil es sich ja um eine Abbildung handelt.
Alle endlichen Gruppen, welche wir bis jetzt betrachtet hatten, waren abelsch, insbesondere ist also $S_3$ nicht zur Gruppe $\mathbb{Z}_6$ isomorph (welche auch 6 Elemente hat).
Im allgemeinen haben wir folgende Aussage:

**Satz 6.2.** *Die Gruppe $S_n$ hat $n!$ viele Elemente.*

*Beweis.* Ein Element $\sigma \in S_n$ ist eine Abbildung der Menge $\{1, \ldots, n\}$ auf sich selbst, also durch die Werte $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)$ eindeutig festgelegt. Für $\sigma(1)$ gibt es $n$ Möglichkeiten, aber für $\sigma(2)$ dann nur noch $n-1$, nämlich alle Elemente der Menge $\{1, \ldots, n\} \backslash \{\sigma(1)\}$. Weiter gibt es für $\sigma(3)$ nur noch $n-2$ Möglichkeiten etc. Damit gibt es für $\sigma$ insgesamt $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ viele Möglichkeiten, und dies ist die Anzahl der Elemente der Menge $S_n$. □

Um die Struktur der Gruppen $S_n$ besser zu verstehen, muss man spezielle Permutationen, die sogenannten Transpositionen betrachten.

**Definition 6.3.** *Sei $\tau \in S_n$. Falls Zahlen $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i \neq j$ existieren, so dass gilt*

$$\begin{array}{lcll} \tau(i) & = & j & \\ \tau(j) & = & i & \\ \tau(k) & = & k & \forall k \notin \{i, j\} \end{array},$$

*dann heißt $\tau$ eine Transposition.*

Im Beispiel $S_3$ weiter oben sind die Permutationen $\tau_{12}$, $\tau_{23}$ und $\tau_{13}$ Transpositionen, aber nicht die Permutationen $\alpha$ und $\beta$.
Transpositionen haben die folgenden Eigenschaften.

**Lemma 6.4.** *1. Für jede Transposition $\tau \in S_n$ gilt: $\tau^{-1} = \tau$.*

*2. Sei*

$$\tau_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n \\ 2 & 1 & 3 & 4 & \ldots & n \end{pmatrix} \in S_n$$

*(die ist mit der Notation $\tau_{12} \in S_3$, welche wir weiter oben benutzt haben, kompatibel). Dann gilt für jede beliebige Transposition $\tau \in S_n$: Es gibt eine Permutation $\sigma \in S_n$ mit*

$$\tau = \sigma \circ \tau_{12} \circ \sigma^{-1}.$$

3. *Jede Permutation $\sigma \in S_n$ läßt sich als Produkt $\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \ldots \circ \tau_k$ von Transpostionen schreiben. Dabei sind werde die Transpositionen selbst, noch deren Anzahl $k$ eindeutig bestimmt.*

*Beweis.* 1. Es ist klar, dass für alle Transpositionen $\tau \in S_n$ gilt, dass $\tau \circ \tau = \mathrm{id}_{\{1,\ldots,n\}}$ ist, daher folgt $\tau^{-1} = \tau$.

2. Nach Definition gibt es $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$ mit $\tau(i) = j$, $\tau(j) = i$ und $\tau(k) = k$ für alle $k \notin \{i, j\}$. Sei nun $\sigma$ eine beliebige Permutation aus $S_n$, welche aber $\sigma(1) = i$ und $\sigma(2) = j$ erfüllt. Wir setzen $\tau' := \sigma \circ \tau_{12} \circ \sigma^{-1}$. Dann ist $\tau'(i) = \sigma(\tau_{12}(\sigma^{-1}(i))) = \sigma(\tau_{12}(1)) = \sigma(2) = j$ und $\tau'(j) = \sigma(\tau_{12}(\sigma^{-1}(j))) = \sigma(\tau_{12}(2)) = \sigma(1) = i$. Außerdem gilt für alle $k \in \{1, \ldots, n\} \backslash \{i, j\}$: $\tau'(k) = \sigma(\tau_{12}(\sigma^{-1}(k))) = \sigma(\tau_{12}(l))$, wobei $l := \sigma^{-1}(k)$ gilt, also insbesondere $l \notin \{1, 2\}$ gilt. Daher ist $\tau_{12}(l) = l$ und daher $\sigma(l) = k$, also $\tau'(k) = k$. Damit haben wir $\tau'(m) = \tau(m)$ für alle $m \in \{1, \ldots, n\}$ bewiesen, also ist $\tau = \sigma \circ \tau_{12} \circ \sigma^{-1}$.

3. Der einfachste Fall ist der Fall $\sigma = \mathrm{id}_{\{1,\ldots,n\}}$, dann folgt $\sigma = \tau \circ \tau$ für eine beliebige Transposition $\tau$. Ist hingegen $\sigma \neq \mathrm{id}_{\{1,\ldots,n\}}$, dann existiert ein $k \in \{1, \ldots, n\}$ $\sigma(i) = i$ für alle $i \in \{1, \ldots, k-1\}$, aber $\sigma(k) \neq k$, und dann muss sogar $\sigma(k) > k$ gelten. Dann sei $\tau_1$ die Transposition, welche $k$ mit $\sigma(k)$ vertauscht, und wir betrachten $\sigma' := \tau_1 \circ \sigma$. Dann ist entweder $\sigma' = \mathrm{id}_{\{1,\ldots,n\}}$, oder es existiert $l$ mit $\sigma'(i) = i$ für alle $i \in \{1, \ldots, l-1\}$ und $\sigma(l) > l$, aber dann ist notwendig $l > k$. Wir wenden das Verfahren auf $\sigma'$ an, und erhalten eine Transposition $\tau_2$ etc. Irgendwann endet das Verfahren mit $\mathrm{id}_{\{1,\ldots,n\}}$, d.h., es gibt Transpositionen $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$ mit $\tau_k \circ \ldots \circ \tau_1 \circ \sigma = \mathrm{id}$, d.h.

$$\sigma = (\tau_k \circ \ldots \circ \tau_1)^{-1} = \tau_1^{-1} \circ \ldots \circ \tau_k^{-1} = \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_k$$

und dies liefert die gewünschte Zerlegung von $\sigma$ in ein Produkt von Transpositionen.

□

Zur Bestimmung der Determinante einer quadratischen Matrix müssen wir einer Permutation ein Vorzeichen zuordnen. Dies hat auch damit zu tun, dass zwar die Zerlegung einer Permutation in ein Produkt von Transpositionen nicht eindeutig ist, nicht einmal die dafür nötige Anzahl ist eindeutig, aber die *Parität* dieser Anzahl ist es, d.h., jede Permutation lässt sich entweder in ein Produkt einer geraden oder einer ungeraden Anzahl von Permutationen zuordnen.

**Definition 6.5.** *Sei $\sigma \in S_n$. Sei $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$. Falls*

$$i < j \qquad \textit{und} \qquad \sigma(i) > \sigma(j)$$

*gilt, dann heißt das Paar $(i, j)$ ein* Fehlstand *von $\sigma$.*
*Dann ist das* Vorzeichen *oder* Signum *von $\sigma$ definiert als*

$$\mathrm{sign}\,(\sigma) := (-1)^{|\{\textit{Fehlstände}(\sigma)\}|} = \begin{cases} +1 & \textit{falls } \sigma \textit{ eine gerade Anzahl von Fehlständen hat} \\ -1 & \textit{falls } \sigma \textit{ eine ungerade Anzahl von Fehlständen hat} \end{cases}$$

*Man sagt auch, dass $\sigma$ eine gerade bzw. eine ungerade Permutation ist, falls das Vorzeichen von $\sigma$ gleich 1 bzw. gleich $-1$ ist.*

Als Beispiel betrachte man die Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Hier habe wir Fehlstände$(\sigma) = \{(1, 2), (1, 4), (3, 4)\}$, also ist $\mathrm{sign}\,(\sigma) = (-1)^3 = -1$, $\sigma$ ist also eine ungerade Permutation.
Um das Vorzeichen effektiv berechnen zu können, verwenden wir den folgenden Satz.

**Satz 6.6.** *1. Für alle $\sigma \in S_n$ gilt*

$$\mathrm{sign}\,(\sigma) = \prod_{i<j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

2. *Für alle $\sigma, \tau \in S_n$ gilt*

$$\operatorname{sign}(\sigma \circ \tau) = \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \operatorname{sign}(\tau)$$

3. *Die Abbildung*

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{sign} : & S_n & \longrightarrow & \{1,-1\} \\ & \sigma & \longrightarrow & \operatorname{sign}(\sigma) \end{array}$$

*ist ein Gruppenhomomorphismus der Gruppe $(S_n, \circ)$ in die Gruppe $(\{1,-1\}, \cdot)$ (letztere ist zur Gruppe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ isomorph).*

*Beweis.* 1. Zunächst müssen wir verstehen, dass das Produkt $\prod_{i<j} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$ nur entweder gleich 1 oder gleich $-1$ sein kann. Man schreibe es als einen Bruch, also als $\frac{\prod_{i<j} \sigma(j)-\sigma(i)}{\prod_{i<j} j-i}$. Dann stehen, nach eventuellem Umordnen, im Zähler und im Nenner die gleichen Faktoren, allerdings mit eventuell verschiedenem Vorzeichen. Daher ist $\left|\prod_{i<j} \sigma(j)-\sigma(i)\right| = \left|\prod_{i<j} j-i\right|$, also kann das obige Produkt nur gleich 1 oder $-1$ sein. Um präzise zu bestimmen, welches Vorzeichen auftritt, führt man folgende Rechnung aus, bei der $m$ gleich der Anzahl der Fehlstände von $\sigma$ sein soll:

$$\begin{aligned} \prod_{i<j} (\sigma(j)-\sigma(i)) &= \left( \prod_{\substack{i<j \\ \sigma(i)<\sigma(j)}} (\sigma(j)-\sigma(i)) \right) \cdot (-1)^m \cdot \prod_{\substack{i<j \\ \sigma(i)>\sigma(j)}} |\sigma(j)-\sigma(i)| \\ &= (-1)^m \cdot \prod_{i<j} |\sigma(j)-\sigma(i)| \end{aligned}$$

Nun ist der Kernpunkt, dass aus der Tatsache, dass $\sigma$ eine Bijektion ist, folgt, dass

$$\prod_{i<j} |\sigma(j)-\sigma(i)| = \prod_{i<j} |j-i|$$

gilt, denn in den Produkten auf der linken und auf der rechten Seite kommen alle Faktoren vor (nur eben in unterschiedlicher Reihenfolge). Natürlich ist $\prod_{i<j} |j-i| = \prod_{i<j} (j-i)$, so dass insgesamt gilt

$$\prod_{i<j} (\sigma(j)-\sigma(i)) = (-1)^m \cdot \prod_{i<j} (j-i) = \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \prod_{i<j} (j-i)\,.$$

2. Wir verwenden die eben bewiesene Formel. Es gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{sign}(\tau \circ \sigma) &= \prod_{i<j} \frac{\tau(\sigma(j)) - \tau(\sigma(i))}{j-i} \\ &= \prod_{i<j} \frac{\tau(\sigma(j)) - \tau(\sigma(i))}{\sigma(j)-\sigma(i)} \cdot \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i} \\ &= \prod_{i<j} \frac{\tau(\sigma(j)) - \tau(\sigma(i))}{\sigma(j)-\sigma(i)} \cdot \prod_{i<j} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i} \end{aligned} \tag{6.1}$$

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned}\prod_{i<j}\frac{\tau(\sigma(j))-\tau(\sigma(i))}{\sigma(j)-\sigma(i)} &= \prod_{\substack{i<j\\ \sigma(i)<\sigma(j)}}\frac{\tau(\sigma(j))-\tau(\sigma(i))}{\sigma(j)-\sigma(i)}\cdot\prod_{\substack{i<j\\ \sigma(i)>\sigma(j)}}\frac{\tau(\sigma(j))-\tau(\sigma(i))}{\sigma(j)-\sigma(i)}\\ &= \prod_{\substack{i<j\\ \sigma(i)<\sigma(j)}}\frac{\tau(\sigma(j))-\tau(\sigma(i))}{\sigma(j)-\sigma(i)}\cdot\prod_{\substack{i>j\\ \sigma(i)<\sigma(j)}}\frac{\tau(\sigma(j))-\tau(\sigma(i))}{\sigma(j)-\sigma(i)}\end{aligned}$$

Hier argumentieren wir folgendermaßen: Es ist

$$\prod_{\substack{i<j\\ \sigma(i)>\sigma(j)}}(\tau(\sigma(j))-\tau(\sigma(i))) = \prod_{\substack{i>j\\ \sigma(i)<\sigma(j)}}(\tau(\sigma(i))-\tau(\sigma(j)))$$

und

$$\prod_{\substack{i<j\\ \sigma(i)>\sigma(j)}}(\sigma(j))-\sigma(i)) = \prod_{\substack{i>j\\ \sigma(i)<\sigma(j)}}(\sigma(i))-\sigma(j))$$

also

$$\prod_{\substack{i<j\\ \sigma(i)>\sigma(j)}}\frac{\tau(\sigma(j))-\tau(\sigma(i))}{\sigma(j)-\sigma(i)} = \prod_{\substack{i>j\\ \sigma(i)<\sigma(j)}}\frac{\tau(\sigma(i))-\tau(\sigma(j))}{\sigma(i)-\sigma(j)} = \prod_{\substack{i>j\\ \sigma(i)<\sigma(j)}}\frac{\tau(\sigma(j))-\tau(\sigma(i))}{\sigma(j)-\sigma(i)}$$

Wir können also weiter rechnen:

$$\begin{aligned}\prod_{i<j}\frac{\tau(\sigma(j))-\tau(\sigma(i))}{\sigma(j)-\sigma(i)} &= \prod_{\substack{i<j\\ \sigma(i)<\sigma(j)}}\frac{\tau(\sigma(j))-\tau(\sigma(i))}{\sigma(j)-\sigma(i)}\cdot\prod_{\substack{i<j\\ \sigma(i)>\sigma(j)}}\frac{\tau(\sigma(j))-\tau(\sigma(i))}{\sigma(j)-\sigma(i)}\\ &= \prod_{\substack{i<j\\ \sigma(i)<\sigma(j)}}\frac{\tau(\sigma(j))-\tau(\sigma(i))}{\sigma(j)-\sigma(i)}\cdot\prod_{\substack{i>j\\ \sigma(i)<\sigma(j)}}\frac{\tau(\sigma(j))-\tau(\sigma(i))}{\sigma(j)-\sigma(i)}\\ &= \prod_{\sigma(i)<\sigma(j)}\frac{\tau(\sigma(j))-\tau(\sigma(i))}{\sigma(j)-\sigma(i)}\end{aligned}$$

Weil $\sigma$ eine Bijektion ist, haben wir wieder die Gleichheit von Produkten

$$\prod_{\sigma(i)<\sigma(j)}\frac{\tau(\sigma(j))-\tau(\sigma(i))}{\sigma(j)-\sigma(i)} = \prod_{i<j}\frac{\tau(j)-\tau(i)}{j-i}$$

so dass wir schlussfolgern

$$\prod_{i<j}\frac{\tau(\sigma(j))-\tau(\sigma(i))}{\sigma(j)-\sigma(i)} = \prod_{i<j}\frac{\tau(j)-\tau(i)}{j-i}$$

Damit liefert Formel (6.1), dass

$$\operatorname{sign}(\tau\circ\sigma) = \prod_{i<j}\frac{\tau(\sigma(j))-\tau(\sigma(i))}{\sigma(j)-\sigma(i)}\cdot\prod_{i<j}\frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i} = \prod_{i<j}\frac{\tau(j)-\tau(i)}{j-i}\cdot\prod_{i<j}\frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i} = \operatorname{sign}(\tau)\cdot\operatorname{sign}(\sigma)$$

ist.

3. Nach Definition für Gruppenhomorphismen (siehe Definition 3.4 ist dies gerade die eben bewiesene Eigenschaft $\operatorname{sign}(\tau \circ \sigma) = \operatorname{sign}(\tau) \cdot \operatorname{sign}(\sigma)$.

□

Als Konsequenz können wir für jede Permutation einfach das Vorzeichen ausrechnen.

**Korollar 6.7.** *1. Sei $\tau \in S_n$ eine Transposition, dann gilt* $\operatorname{sign}(\tau) = -1$.

*2. Sei $\sigma \in S_n$, und sei $\sigma = \tau_1 \cdot \ldots \cdot \tau_k$ eine Zerlegung in Transpositionen gemäß Lemma 6.4, 3. Dann gilt*

$$\operatorname{sign}(\sigma) = (-1)^k.$$

*Beweis.* 1. Sei $\tau_{12}$ die weiter oben betrachtete Transposition $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n \\ 2 & 1 & 3 & 4 & \ldots & n \end{pmatrix}$ Dann gilt offensichtlich $\operatorname{sign}(\tau_{12}) = -1$, denn $(1,2)$ ist der einzige Fehlstand von $\tau_{12}$. Sei nun $\tau$ eine beliebige Transposition. Dann gibt es wegen Lemma 6.4 eine Permutatation $\sigma \in S_n$ mit $\tau = \sigma \circ \tau_{12} \circ \sigma^{-1}$. Da $\sigma$ die Homomorphismuseigenschaft hat (siehe der letzte Satz), gilt also

$$\operatorname{sign}(\tau) = \operatorname{sign}(\sigma \circ \tau_{12} \circ \sigma^{-1}) = \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \operatorname{sign}(\tau_{12}) \cdot \operatorname{sign}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \operatorname{sign}(\sigma^{-1}) \operatorname{sign}(\tau_{12})$$

Wiederum weil sign ein Homomorphismus ist, folgt $\operatorname{sign}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sign}(\sigma)$, also

$$\operatorname{sign}(\tau) = \operatorname{sign}(\tau_{12}) = -1.$$

2. Dies folgt direkt aus Teil 1. und der Homomorphismuseigenschaft von sign .

□

Man beachte, dass Teil 2 dieses Korollars impliziert, dass die Parität der Anzahl der in einer Produktzerlegung einer Permutation auftretenden Transpositionen immer gleich ist, denn das Vorzeichen einer Permutation ist festgelegt und hängt nicht von der Zerlegung in ein Produkt von Transpositionen ab.
Aus Gründen der Vollständigkeit geben wir noch folgende Definition.

**Definition 6.8.** *Sei*

$$A_n := \{\sigma \in S_n \,|\, \operatorname{sign}(\sigma) = 1\}.$$

*Da sich $A_n$ alternativ als* $\ker(\sigma)$ *schreiben lässt (denn* 1 *ist das neutrale Element der Gruppe* $(\{1,-1\},\cdot)$*, folgt, dass $A_n$ eine Untergruppe von $S_n$ ist, genannt die* alternierende Gruppe*. Definiere weiterhin für alle $\sigma \in S_n$*

$$A_n\sigma := \{\sigma' \circ \sigma \,|\, \sigma' \in A_n\}$$

*als die* Nebenklasse *von $\sigma$ bezüglich $A_n$.*

Falls $\sigma \in A_n$ ist, folgt $A_n\sigma = A_n$. Ansonsten gilt:

**Lemma 6.9.** *Sei $\sigma \in S_n$ mit* $\operatorname{sign}(\sigma) = -1$*. Dann gilt*

$$S_n = A_n \cup A_n\sigma \qquad \textit{und} \qquad A_n \cap A_n\sigma = \varnothing.$$

*Die beiden Mengen $A_n$ und $A_n\sigma$ haben jeweils $\frac{1}{2}n!$ viele Elemente.*

*Beweis.* Klar ist, dass $S_n \supset A_n \cup A_n\sigma$ gilt. Sei andererseits $\sigma' \in S_n$ gegeben, falls $\operatorname{sign}(\sigma') = 1$ ist, dann folgt $\sigma' \in A_n$. Sei $\operatorname{sign}(\sigma') = -1$, dann ist $\operatorname{sign}(\sigma' \circ \sigma^{-1}) = \operatorname{sign}(\sigma') \cdot \operatorname{sign}(\sigma^{-1}) = (-1) \cdot (-1) = 1$, d.h., $\sigma' \circ \sigma \in A_n$, aber dies bedeutet, dass $\sigma' \in A_n\sigma$ gilt. Damit ist also $S_n = A_n \cup A_n\sigma$. Da für jedes $\sigma' \in A_n\sigma$ gilt, dass $\operatorname{sign}(\sigma') = -1$ ist, folgt $\sigma' \notin A_n$, also ist $A_n \cap A_n\sigma = \varnothing$.
Wie man sich leicht überlegt, ist die Abbildung $A_n \to A_n\sigma; \sigma' \mapsto \sigma' \circ \sigma$ bijektiv (mit Umkehrabbildung $\sigma' \mapsto \sigma' \circ \sigma^{-1}$), also haben $A_n$ und $A_n\sigma$ gleich viele Elemente, nämlich $\frac{1}{2}n!$ viele. □

## 6.2 Axiome für Determinanten

Nun kommen wir zum eigentlichen Thema dieses Kapitels, nämlich zu Determinanten. Wie weiter oben schon erklärt, wollen wir damit jeder quadratischen Matrix eine Zahl, d.h., ein Element des Grundkörpers zuordnen. Man könnte die Determinante durch eine Formel definieren, es ist aber praktischer, erst die Eigenschaften, die die Determinante hat, zu formulieren (nämlich als Axiome), und dann zu zeigen, dass es nur eine möglich Definition gibt, die diese Eigenschaften liefert. Wir benutzen die folgende Notation: Für $A \in \mathrm{M}(n \times n, K)$ schreiben wir

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$$

wobei $a_i \in \mathrm{M}(1 \times n, K)$ die Zeilen der Matrix $A$ sein sollen. (Zur Erinnerung: Wir hatten häufiger die Spalten einer Matrix $A$ durch $A = (a'_1 | \dots | a'_n)$ mit $a'_i \in \mathrm{M}(n \times 1, K)$ bezeichnet).

**Definition 6.10.** *Sei $K$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$, dann heißt eine Abbildung*

$$\det : M(n \times n, K) \longrightarrow K$$

*eine Determinante, wenn die folgenden Axiome für alle $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix} \in M(n \times n, K)$ gelten:*

**D1** *Für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und alle $\lambda \in K$ gilt*

$$\det \begin{pmatrix} \vdots \\ \lambda \cdot a_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \lambda \cdot \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

*Außerdem gilt für alle $a_i, a'_i \in M(1 \times n, K)$, dass*

$$\det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i + a'_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a'_i \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

*In der obigen Notation soll an allem mit $\vdots$ bezeichneten Stellen immer die gleichen Zeilenvektoren $a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$ stehen. Für die Eigenschaft D1 sagt man auch, dass* det *in jeder Zeile linear ist.*

**D2** *Falls $A$ zwei gleiche Zeilen hat, so ist* $\det(A) = 0$ *(man sagt,* det *ist* alternierend*).*

**D3** det *ist normiert, dass heisst, es gilt* $\det(E_n) = 1$.

*Häufig schreibt man auch*

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} := \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det(A)$$

*für die Determinante.*

Wir werden im nächsten Abschnitt beweisen, dass die Determinante (also eine Funktion det mit den obigen Eigenschaften) wirklich existiert und auch eindeutig bestimmt ist. Bis dahin können wir aus den Axiomem D1-D3 weitere Eigenschaften ableiten, und erläutern, wie man die Determinante (nur unter Benutzung dieser Axiome) konkret ausrechnen kann.

**Lemma 6.11.** *Sei* $\det : M(n \times n, K) \to K$ *eine Determinante. Dann gilt*

1. *Für alle* $\lambda \in K$ *ist* $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A)$*, hierbei ist* $\lambda \cdot A$ *die auf dem* $K$*-Vektorraum* $M(n \times n, K)$ *definierte Skalarmultiplikation, d.h., es wird* jeder *Eintrag der Matrix* $M(n \times n, K)$ *mit* $\lambda$ *multipliziert, und nicht nur eine Zeile wie in Axiom D1.*

2. *Falls eine Zeile von* $A$ *nur aus Nullen besteht, dann ist* $\det(A) = 0$*.*

3. *Sei* $B$ *aus* $A$ *durch Vertauschen von zwei Zeilen hervorgegangen, dann ist* $\det(B) = -\det(A)$ *(dies erklärt auch den Namen „alternierend“).*

4. *Die Determinante verändert sich nicht bei Zeilenumformungen vom Typ III (siehe Seite 73), d.h., sei* $\lambda \in K$*, seien* $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ *mit* $i \neq j$ *und entstehe* $B$ *aus* $A$ *durch Addition des* $\lambda$*-fachen der* $i$*-ten Zeile auf die* $j$*-te Zeile, dann gilt* $\det(B) = \det(A)$*.*

5. *Sei* $A = (a_{ij})$ *eine* obere Dreiecksmatrix*, d.h., es gelte* $a_{ij} = 0$ *für alle* $i > j$*. Dann sieht* $A$ *also so aus:*
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$
*Dann ist* $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot \ldots \cdot a_{nn}$*.*

6. *Sei* $A$ block-diagonal*, d.h., seien* $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ *mit* $n_1 + n_2 = n$ *und seien* $A_i \in M(n_i \times n_i, K)$ *für* $i = 1, 2$ *gegeben, so dass*
$$A = \begin{pmatrix} A_1 & C \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$
*Dann ist* $\det(A) = \det(A_1) \cdot \det(A_2)$*.*

7. *Es ist* $\det(A) = 0$ *genau dann, wenn* $\mathrm{rk}(A) < n$ *gilt (und das ist nach Lemma 5.27 äquivalent zu* $A \notin GL(n, K)$*).*

8. *Für alle* $A, B \in M(n \times n, K)$ *gilt*
$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$
*und damit für* $A \in GL(n, K)$*:* $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$*. Die Regel* $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ *heißt* Determinantenmultiplikationssatz*, insbesondere folgt aus ihr, dass* $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$ *gilt, obwohl die Matrizen* $A \cdot B$ *und* $B \cdot A$ *durchaus nicht gleich sein müssen.*

Es sei an dieser Stelle explizit festgehalten, dass das Analogon des Determinantenmultiplikationssatzes für die Addition *nicht* gilt, d.h., es ist für $A, B \in \mathrm{M}(n \times n, K)$ im Allgemeinen $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$, falls $n > 1$ ist.

*Beweis.* 1. Man verwende das Axiom D1 $n$-mal.

2. Addiere eine beliebige Zeile zur Zeile, welche aus Nullen besteht (D1), und verwende das Axiom D2.

3. Sei

$$A = \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Dann folgt wegen Axiom D2:

$$\det(A) + \det(B) = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \underbrace{\det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix}}_{=0} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix} + \underbrace{\det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix}}_{=0}$$

$$\overset{D1}{=} \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_i + a_j \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i + a_j \\ \vdots \end{pmatrix} \overset{D1}{=} \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i + a_j \\ \vdots \\ a_i + a_j \\ \vdots \end{pmatrix} = 0$$

4. Wir verwenden wieder die Axiome D1 und D2:

$$\det(B) = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ \lambda \cdot a_i + a_j \\ \vdots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ \lambda \cdot a_i \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} = \lambda \cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix}}_{=0} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} = \det(A).$$

5. Betrachten wir zunächst den Fall, bei dem $a_{ii} \neq 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt. Dann haben wir schon im Abschnitt 5.7 (siehe z.B. den Beweis von Satz 5.45) gesehen, dass wir $A$ durch Zeilenumformungen ausschliesslich vom Typ III in eine Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

überführen können, und wegen des gerade bewiesenen Punktes 4. bleibt dabei die Determinante unverändert. Nun ist aber

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} \overset{D1}{=} a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn} \cdot E_n \overset{D3}{=} a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn}.$$

Nehmen wir nun an, dass es ein $i$ mit $a_{ii} = 0$ gibt. Sei $i$ maximal gewählt, d.h., es gelte $a_{jj} \neq 0$ für alle $j = i+1, \ldots, n$. Dann kann man durch Zeilenumformungen nur vom Typ III (nämlich genau mit Hilfe der Diagonaleinträger $a_{jj}$ für $j = i+1, \ldots, n$) die $i$-te Zeile ganz zu Null machen, also ist nach D2 dann $\det(A) = 0$, und damit stimmt die Formel auch in diesem Fall.

6. Wir formen $A$ durch Zeilenumformungen vom Typ III und IV zu einer Matrix

$$A' = \begin{pmatrix} A'_1 & C' \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

um, so dass $A'_1$ eine obere Dreiecksmatrix ist, man beachte, dass dabei $A_2$ nicht verändert wird. Hierbei seien $k$ Umformungen vom Typ IV, also $k$ Vertauschungen von Zeilen nötig. Dann gilt $\det(A'_1) = (-1)^k \cdot \det(A_1)$. Danach formt man $A'$ durch Umformungen vom Typ III und IV in eine Matrix $A''$ mit

$$A'' = \begin{pmatrix} A'_1 & C' \\ 0 & A''_2 \end{pmatrix}$$

um, so dass $A''_2$ eine obere Dreiecksmatrix ist (und dabei verändern sich $A'_1$ und $C'$ nicht). Es gilt dann natürlich $\det(A''_2) = (-1)^l \cdot \det(A_2)$, wenn $l$ die Anzahl der notwendigen Zeilenvertauschungen ist. Nun ist die Matrix $A''$ selbst eine obere Dreiecksmatrix (genauso wie $A'_1$ und $A''_2$), also ist nach dem Punkt 5.

$$\det(A'') = \det(A'_1) \cdot \det(A''_2)$$

aber $A''$ ist ja unter Verwendung von $k+l$ Zeilenvertauschungen (und einer beliebigen Anzahl von Umformungen des Typs III) aus $A$ entstanden, also gilt auch $\det(A'') = (-1)^{k+l} \cdot \det(A)$, daher folgt insgesamt

$$\det(A) = \det(A_1) \cdot \det(A_2).$$

7. Wir bringen $A$ auf Zeilenstufenform $B$, und dann ist $B = (b_{ij})$ eine obere Dreiecksmatrix, also ist $\det(A) = \pm \det(A)$ das Produkt ihrer Diagonalelemente. Dieses ist Null genau dann, wenn ein Diagonalelement Null ist, aber dies ist zu $\mathrm{rk}(B) < n$ äquivalent, und es gilt natürlich $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(B)$.

8. Da das Produkt von Matrizen die Komposition der durch die einzelnen Matrizen gegebenen linearen Abbildungen bezüglich der Standardbasis in $K^n$ repräsentiert (siehe Lemma 5.21), folgt aus $\mathrm{rk}(A) < n$, dass $\mathrm{rk}(A \cdot B) < n$ gilt, und dann lautet die Gleichung $0 = 0$ und ist daher richtig. Wir nehmen also $A \in \mathrm{GL}(n, K)$ an. Dann haben wir in Satz 5.45 gezeigt, dass $A$ ein Produkt von Elementarmatrizen ist, d.h., es gibt Elementarmatrizen $C_1, \ldots, C_k$ mit $A = C_1 \cdot \ldots \cdot C_k$. Da wiederum die Elementarmatrizen vom Typ $Q_i^j(\lambda)$ und $P_i^j$ sich durch als Produkt von Matrizen vom Typ $Q_i^j$ und $S_i(\lambda)$ schreiben lassen (Übung), reicht es, zu zeigen, dass für alle Elementarmatrizen $C$ vom Typ $Q_i^j$ oder $S_i(\lambda)$ und für alle $B \in \mathrm{M}(n \times n, K)$ gilt, dass $\det(C \cdot B) = \det(C) \cdot \det(B)$ ist.

   Zunächst ist

$$\det(Q_i^j) = 1 \qquad \text{und} \qquad \det(S_i(\lambda)) = \lambda,$$

   letzteres folgt aus einer Variante des Punktes 5. für untere Dreiecksmatrizen. Jetzt erinnern wir uns daran, dass Multiplikation von links mit $Q_i^j$ die Addition der $i$-ten zur $j$-ten Zeile bewirkt, also ist nach D1 $\det(Q_i^j \cdot B) = \det(B)$, und Multiplikation von links mit $S_i(\lambda)$ entspricht Multiplikation der $i$-ten Zeile mit $\lambda$, daher gilt $\det(S_i(\lambda) \cdot B) = \lambda \cdot \det(B)$.

□

Als Anwendung können wir gewisse Determinanten bereits ausrechnen. Ist nämlich $A \in \mathrm{M}(n \times n, K)$ gegeben, so kann man $A$ durch Zeilenumformungen vom Typ III und IV in Zeilenstufenform bringen $B$, und $B$ ist dann eine obere Dreiecksmatrix, d.h., von der Gestalt

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\det(B) = b_{11} \cdot \ldots \cdot b_{nn}$, und wenn man beim Umformen von $A$ nach $B$ $k$-mal Zeilen vertauscht hat, so gilt

$$\det(A) = (-1)^k \cdot \det(B) = (-1)^k \cdot b_{11} \cdot \ldots \cdot b_{nn}.$$

Sei zum Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

und nehmen wir an, dass $a_{11} \neq 0$ gilt. Dann ist die Zeilenstufenform von $A$ (welche ohne Zeilenvertauschungen erreicht wird) durch

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12} \end{pmatrix}$$

gegeben, und es folgt

$$\det(A) = \det(B) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Falls $a_{11} = 0$ ist, erreicht man die Zeilenstufenform

$$B = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ 0 & a_{12} \end{pmatrix},$$

durch Vertauschen der ersten und zweiten Zeile, und dann ist $\det(A) = -\det(B) = -a_{21}a_{12}$. Also gilt allgemein, d.h., für alle $a_{ij} \in K$, dass

$$\det(A) = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \tag{6.2}$$

ist.

## 6.3 Die Leibniz-Formel

Wir werden in diesem Abschnitt beweisen, dass die Determinante wirklich existiert, dass sie eindeutig ist (d.h., dass es nur eine Abbildung $\mathrm{M}(n \times n, K) \to K$ gibt, welche die Axiome D1, D2 und D3 erfüllt). Dabei werden wir eine explizite Formel für die Determinante angeben. Tatsächlich ist diese in praktischen Berechnungen aber meist nicht so nützlich.
Zunächst formulieren und beweisen wir ein einfaches Lemma, welches wir später beim Beweis der Leibniz-Formel brauchen.

**Lemma 6.12.** *Betrachte die Standardbasisvektoren $e_1, \ldots, e_n$ von $K^n$ als Zeilenvektoren. Sei $\sigma \in S_n$, dann betrachten wir die Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} e_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ e_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$$

*in welcher die umgeordneten Zeilen untereinander geschrieben werden (in der durch $\sigma$ gegebenen Ordnung). Dann gilt*

$$\det(A) = \operatorname{sign}(\sigma).$$

*Beweis.* Wegen Lemma 6.4, 3. kann man $\sigma$ in ein Produkt $\sigma = \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_k$ von Transpositionen zerlegen, und es ist dann $\operatorname{sign}(\sigma) = (-1)^k$. Andererseits kann man dann die Matrix $A$ durch $k$ Zeilenvertauschungen in die Einheitsmatrix umformen, und dann gilt wegen Axiom D3 und der Regel aus Lemma 6.11, 3., dass $\det(A) = (-1)^k$ ist. □

**Satz 6.13** (Leibniz-Formel)**.** *Sei $K$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert genau eine Determinante*

$$\det : M(n \times n, K) \longrightarrow K$$

*und diese ist folgendermaßen gegeben: Sei $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, K)$, dann ist*

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot a_{1\,\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\,\sigma(n)}. \tag{6.3}$$

Die in der Formel auftretende Summe hat also $n!$ viele Summanden, und zwar läuft man für jedes vorgegebene Element $\sigma \in S_n$ durch die Zeilen der Matrix $A$ und wählt in der Zeile $i$ das Element aus, welches in der Spalte $\sigma(i)$ steht. Diese Elemente multipliziert man, und versieht sie gegebenenfalls mit negativem Vorzeichen, falls die Permutation $\sigma$ ungerade ist. Dann bildet man die Summe über alle diese Produkte. Als erstes Beispiel kann man sich überlegen, dass die Leibniz-Formel im Fall $n = 2$ genau die Formel (6.2) liefert ($S_2$ hat 2 Elemente, und die Summe besteht aus 2 Summanden, einen mit positiven, und einen mit negativem Vorzeichen).

*Beweis des Satzes.* Zunächst wird bewiesen, dass eine Determinante wegen der Axiome D1-D3 notwendig die Form (6.3) haben muss, d.h., es wird die Eindeutigkeit bewiesen. Der zweite Schritt ist die Existenz, d.h., wir zeigen danach, dass die durch die Leibniz-Formel definierte Funktion auch wirklich die Axiome D1-D3 erfüllt. Zum Beweis der Eindeutigkeit schreiben wir die Matrix $A$ wieder in Zeilenvektoren, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

und überlegen wir uns, dass wir jeden Zeilenvektor $a_i$ als Summe

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot e_j$$

schreiben können, wobei der Standardbasisvektor $e_j$ auch als Zeilenvektor geschrieben wird. Wegen des Axioms D1 erhalten wir daher die Gleichung

$$\det(A) = \sum_{i_1=1}^{n} a_{1i_1} \cdot \det \begin{pmatrix} e_{i_1} \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

dies nennt man eine Entwicklung nach der ersten Zeile. Nun wenden wir das gleiche Verfahren auf jede der $n$ Matrizen

$$\begin{pmatrix} e_{i_1} \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

an, und entwickeln nach der zweiten Zeile, d.h., wir schreiben

$$\det \begin{pmatrix} e_{i_1} \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \sum_{i_2=1}^{n} a_{2i_2} \cdot \det \begin{pmatrix} e_{i_1} \\ e_{i_2} \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

und durch Einsetzen dieser Gleichung in die vorherige bekommen wir die Doppelsumme

$$\det(A) = \sum_{i_1=1}^{n} \left( \sum_{i_2=1}^{n} a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdot \det \begin{pmatrix} e_{i_1} \\ e_{i_2} \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \right).$$

Wenn wir dieses Verfahren weiter fortführen, erhalten wir

$$\det(A) = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \dots \sum_{i_n=1}^{n} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdot \ldots \cdot a_{ni_n} \cdot \det \begin{pmatrix} e_{i_1} \\ e_{i_2} \\ \dots \\ e_{i_n} \end{pmatrix}.$$

Dies ist also eine $n$-fache Summe, d.h., es wird über $n$ verschiedene Indizes (nämlich $i_1, i_2, \dots, i_n$) gleichzeitig summiert, und jeder Index durchläuft die Zahlen 1 bis $n$. Man hat also insgesamt $n^n$ Summanden, von denen jeder ein Produkt von $n$ Einträgen von $A$ ist, dabei wird aus jeder Zeile jeweils ein Eintrag genommen. Der entscheidende Punkt ist nun, dass die Determinante

$$\det \begin{pmatrix} e_{i_1} \\ e_{i_2} \\ \dots \\ e_{i_n} \end{pmatrix}$$

gleich Null ist, falls es unter den Indizes $i_1, \dots, i_n$ zwei gleiche gibt, denn dann sind zwei Zeilen dieser Matrix gleich (das ist das Axiom D2). Falls dies nicht der Fall ist, falls also die Menge $\{i_1, \dots, i_n\}$ gleich der Menge $\{1, \dots, n\}$ ist, dann existiert eine Permutation $\sigma \in S_n$ mit $i_k = \sigma(k)$ für alle $k \in \{1, \dots, n\}$. Es folgt also

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} \cdot \det \begin{pmatrix} e_{\sigma(1)} \\ e_{\sigma(2)} \\ \dots \\ e_{\sigma(1)} \end{pmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)},$$

wobei die letzte Gleichheit gerade die Aussage von Lemma 6.12 ist.
Damit ist der erste Teil des Satzes bewiesen, nämlich, dass die Determinantenabbildung, wenn denn eine existiert, nur die durch die Leibniz-Formel gegebene sein kann, denn aus den Axiomen D1-D3 haben wir die Gültigkeit der Leibniz-Formel hergeleitet. Wir müssen nun noch die andere Richtung beweisen, d.h., wir müssen zeigen, dass die durch die Leibniz-Formel (6.3) definierte Abbildung D1-D3 erfüllt. Beginnen wir mit D1: Seien $a_i, a_i' \in \mathrm{M}(1 \times n, K)$, dann ist

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i + a_i' \\ \vdots \end{pmatrix} &= \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot (a_{i\sigma(i)} + a'_{i\sigma(i)}) \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{i\sigma(i)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a'_{i\sigma(i)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} \\ &= \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i' \\ \vdots \end{pmatrix} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}\vdots\\ \lambda\cdot a_i\\ \vdots\end{pmatrix} &= \sum_{\sigma\in S_n} a_{1\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot(\lambda\cdot a_{i\sigma(i)})\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(n)}\\ &= \lambda\cdot\sum_{\sigma\in S_n} a_{1\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot a_{i\sigma(i)}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(n)}\\ &= \lambda\cdot\det\begin{pmatrix}\vdots\\ a_i\\ \vdots\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Nun zum Axiom D2: Seien die $k$-te und die $l$-te Zeile von $A = \begin{pmatrix}\vdots\\ a_i\\ \vdots\end{pmatrix}$ gleich, mit $k < l$. Wir betrachten die Transposition $\tau \in S_n$, welche $k$ und $l$ vertauscht, also $\tau(k) = l$, $\tau(l) = k$ und $\tau(i) = i$ für alle $i \notin \{k, l\}$. Wegen $\operatorname{sign}(\tau) = -1$ (siehe Korollar 6.7) gilt dann nach Lemma 6.9, dass $S_n = A_n \cup A_n\tau$ und dass $A_n \cap A_n\tau = \varnothing$ ist. Also lässt sich die Leibniz-Formel folgendermaßen formulieren:

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sign}(\sigma)\cdot a_{1\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(n)}\\ &= \sum_{\sigma\in A_n}\underbrace{\operatorname{sign}(\sigma)}_{=1}\cdot a_{1\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma'\in A_n\tau}\operatorname{sign}(\sigma')\cdot a_{1\sigma'(1)}\cdot\ldots\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma'(n)}\\ &= \sum_{\sigma\in A_n} a_{1\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma\in A_n}\underbrace{\operatorname{sign}(\sigma\cdot\tau)}_{=-1}\cdot a_{1\sigma(\tau(1))}\cdot\ldots\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(\tau(n))}\\ &= \sum_{\sigma\in A_n} a_{1\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(n)} - \sum_{\sigma\in A_n} a_{1\sigma(\tau(1))}\cdot\ldots\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(\tau(n))}\end{aligned} \tag{6.4}$$

Es gilt nun $a_{kj} = a_{lj}$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$, da die $k$-te und die $j$-te Zeile von $A$ gleich sind. Daher haben wir

$$\begin{aligned}a_{1\sigma(\tau(1))}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(\tau(n))} &= a_{1\sigma(\tau(1))}\cdot\ldots\cdot a_{k\sigma(\tau(k))}\cdot\ldots\cdot a_{l\sigma(\tau(l))}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(\tau(n))}\\ &= a_{1\sigma(\tau(1))}\cdot\ldots\cdot a_{k\sigma(l)}\cdot\ldots\cdot a_{l\sigma(k)}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(\tau(n))}\\ &= a_{1\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot a_{k\sigma(l)}\cdot\ldots\cdot a_{l\sigma(k)}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(n)}\\ &= a_{1\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot a_{l\sigma(l)}\cdot\ldots\cdot a_{k\sigma(k)}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(n)}\\ &= a_{1\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot a_{k\sigma(k)}\cdot\ldots\cdot a_{l\sigma(l)}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(n)}\\ &= a_{1\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(n)}\end{aligned}$$

und damit heben sich in der letzten Zeile der Formel (6.4) die Terme in der ersten und der zweiten Summe auf, und es folgt $\det(A) = 0$.
Für den Beweis des Axioms D3 benutzen wir zum ersten Mal in dieser Vorlesung das Kroneckersymbol $\delta_{ij}$, welches einfach durch

$$\delta_{ij} := \begin{cases}1 & \text{falls } i = j\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

definiert ist. Es folgt dann für eine gegebene Permutation $\sigma \in S_n$, dass

$$\delta_{1\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot\delta_{n\sigma(n)} = \begin{cases}1 & \text{falls } \sigma = \mathrm{id}_{\{1,\ldots,n\}}\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

ist. Damit bekommen wir

$$\det(E_n) = \det(\delta_{ij}) = \sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sign}(\sigma)\delta_{1\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot\delta_{n\sigma(n)} = \operatorname{sign}(\mathrm{id}_{\{1,\ldots,n\}})\cdot 1 = 1,$$

und damit ist der Beweis beendet. □

Wir haben mit diesem Satz bewiesen, dass die Determinante existiert, eindeutig ist, und sowohl die Axiome D1, D2 und D3, als auch alle Eigenschaften, welche wir aus diesen Axiomen abgeleitet haben, also die Eigenschaften von Lemma 6.11 erfüllt. Meistens wird man die Determinante mit den Rechenregeln dieses Lemmas berechnen, aber in Einzelfällen ist auch die Leibniz-Formel selbst nützlich.

**Lemma 6.14.** *Seien*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \textit{und} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

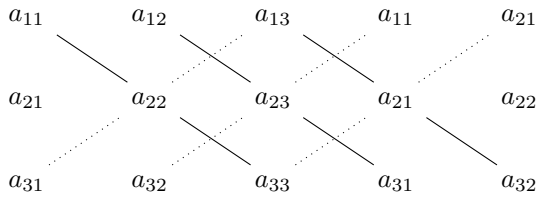
*Dann gilt*

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

*und*

$$\det(B) = b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} - b_{31}b_{22}b_{13} - b_{32}b_{23}b_{11} - b_{33}b_{21}b_{12}$$

*Beweis.* Die Formel für $\det(A)$ hatten wir schon in nach dem Beweis von Lemma 6.11 hergeleitet. Wir können sie aber aus der Leibniz-Formel direkt ablesen: Die Gruppe $S_2$ hat 2 Elemente, und diese geben genau die beiden Summanden in der Formel.
Analog liefert $|S_3| = 6$ die 6 Summanden der Formel für $\det(B)$. Hier gibt es die folgende Vorschrift (genannt „Regel von Sarrus“), mit welcher man sich die Verteilung der Vorzeichen einprägen kann: Man schreibe hinter die Matrix $B$ noch einmal die erste und die zweite Spalte von $B$, und zeichne dann alle „Diagonalen“ ein, wie im folgenden Diagramm:




Dann geben die Einträge, welche auf durchgezogenen Linien liegen, positive Summanden, und die Einträge, welche auf gestrichelten Linien liegen, negative Summanden in der Formel für $\det(B)$. □

Es sei hier vor dem häufig gemachten Fehler gewarnt, die Regel von Sarrus im Fall von $4 \times 4$-Matrizen anzuwenden, da stimmt sie nicht, was man schon daran erkennnen kann, dass die Leibniz-Formel dann $4! = 24$ Summanden hat, aber aus der Regel von Sarrus nur 8 Summanden entstehen würden.
Die folgende Aussage ist nützlich, und eine direkte Konsequenz der Leibniz-Formel.

**Lemma 6.15.** *Sei $A \in M(n \times n, K)$, dann gilt*

$$\det(A) = \det({}^tA).$$

*Beweis.* Sei $A = (a_{ij})$, und ${}^tA = (a'_{ij})$, dann ist $a'_{ij} = a_{ji}$, und dann liefert die Leibniz-Formel, angewandt auf die Matrix ${}^tA$:

$$\begin{aligned} \det({}^tA) &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot a'_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a'_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1)1} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n)n} \end{aligned}$$

Nun gilt aber für jedes $\sigma \in S_n$, dass

$$a_{\sigma(1)1} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n)n} = a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma^{-1}(n)}$$

ist, denn auf beiden Seiten kommen die gleichen Faktoren (in eventuell unterschiedlicher Reihenfolge) vor. Also erhalten wir

$$\begin{aligned}\det({}^tA) &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)\cdot a_{1\sigma^{-1}(1)}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma^{-1}(n)}\\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma^{-1})\cdot a_{1\sigma^{-1}(1)}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma^{-1}(n)}\end{aligned}$$

hier wurde benutzt, dass $\operatorname{sign}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sign}(\sigma)$ gilt. Nun ist

$$\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma^{-1})\cdot a_{1\sigma^{-1}(1)}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma^{-1}(n)} = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)\cdot a_{1\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(n)}$$

da die Summe über alle Elemente von $S_n$ läuft, und daher wieder auf beiden Seiten die gleichen Summanden (eventuell in unterschiedlicher Reihenfolge) auftreten. Wir erhalten also:

$$\det({}^tA) = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)\cdot a_{1\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(n)},$$

und damit ist die gewünschte Gleichheit $\det({}^tA) = \det(A)$ bewiesen. □

Unter Verwendung dieses Lemmas können wir also in Zukunft nicht nur Zeilenumformungen vom Typ III und IV sondern auch entsprechende Spaltenumformungen durchführen, ohne die Determinante zu ändern (Typ III) bzw., so dass sich nur das Vorzeichen der Determinante änderns (Typ IV). Als Anwendung betrachten wir die sogenannte *Vandermonde*-Determinante. Seien $x_1,\ldots,x_n$ Unbekannte, dass sei

$$\Delta_n := \det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1}\end{pmatrix}$$

Dann gilt $\Delta_1 = 1$ und $\Delta_2 = x_2 - x_1$. Für $\Delta_3$ benutzt man Spaltenumformungen vom Typ III und danach das Axiom D1:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2\\ 1 & x_2 & x_2^2\\ 1 & x_3 & x_3^2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2-x_1^2\\ 1 & x_2 & x_2^2-x_1x_2\\ 1 & x_3 & x_3^2-x_1x_3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & 0\\ 1 & x_2 & x_2(x_2-x_1)\\ 1 & x_3 & x_3(x_3-x_1)\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_1-x_1 & 0\\ 1 & x_2-x_1 & x_2(x_2-x_1)\\ 1 & x_3-x_1 & x_3(x_3-x_1)\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\\ 1 & x_2-x_1 & x_2(x_2-x_1)\\ 1 & x_3-x_1 & x_3(x_3-x_1)\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1\\ 0 & x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1)\end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot\begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1\\ x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1)\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_2(x_2-x_1)\\ x_3-x_1 & x_3(x_3-x_1)\end{vmatrix} = (x_2-x_1)(x_3-x_1)\begin{vmatrix} 1 & x_2\\ 1 & x_3\end{vmatrix}$$

$$= (x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2).$$

Man beachte, dass im letzten Schritt die (natürlich offensichtliche) Formel für die Berechnung von $\Delta_2$ benutzt wurde. Man kann analog per Induktion über $n$ zeigen, dass

$$\Delta_n = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j - x_i)$$

gilt (Übungsaufgabe).

## 6.4 Komplementärmatrix, Cramersche Regel und Minoren

In diesem letzten Abschnitt über Determinanten wollen wir noch weitere Methoden zur ihrer Berechnung und auch ein alternatives Verfahren zum Lösen von quadratischen Gleichungssystemen kennenlernen. Hierzu starten wir mit einer zunächst etwas komplizierten Definition.

**Definition 6.16.** *Sei $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, K)$ gegeben. Wir fixieren jetzt Indizes $k, l \in \{1, \dots, n\}$ Dann sei*

$$A_{kl} := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,l-1} & 0 & a_{1\,l+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k-1\,1} & \dots & a_{k-1\,l-1} & 0 & a_{k-1\,l+1} & \dots & a_{k-1\,n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n\,l-1} & 0 & a_{n\,l+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M(n \times n, K).$$

*Desweiteren sei $A'_{kl}$ die $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, welche aus $A$ (oder auch aus $A_{kl}$) durch Wegstreichen der $k$-ten Zeile und $l$-ten Spalte entsteht. Schließlich setzten wir*

$$a^\sharp_{kl} := \det(A_{lk}) \in K$$

*und definieren $A^\sharp := (a^\sharp_{kl}) \in M(n \times n, K)$. $A^\sharp$ heißt die Komplementärmatrix von $A$. Man beachte, dass das Element $a^\sharp_{kl}$ als die Determinante von $A_{lk}$ und* nicht *von $A_{kl}$ definiert wird, die Umkehrung des Index ist* kein *Schreibfehler.*

Als Beispiel betrachten wir

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

dann gilt

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},\ A'_{11} = (4),\ a^\sharp_{11} = \det(A_{11}) = 4 \quad ; \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},\ A'_{12} = (3),\ a^\sharp_{12} = \det(A_{21}) = -2$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ A'_{21} = (2),\ a^\sharp_{21} = \det(A_{12}) = -3 \quad ; \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A'_{22} = (1),\ a^\sharp_{22} = \det(A_{22}) = 1$$

so dass die Komplementärmatrix von $A$ durch

$$A^\sharp = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist.
Wir benötigen folgende Hilfsaussagen über diese Matrizen.

**Lemma 6.17.** *Es gilt:*

1. $\det(A_{kl}) = (-1)^{k+l} \cdot \det(A'_{kl})$.
2. *Schreibe $A = (a^1 | \dots | a^n)$, wobei die Spaltenvektoren $a^1, \dots, a^n \in M(n \times 1, K)$ die Spalten von $A$ sind. Sei $e^k \in M(n \times 1, K)$ der $k$-te Standardbasisvektor von $K^n$, geschrieben als Spaltenvektor. Dann ist*

$$\det(A_{kl}) = \det(a^1 | \dots | a^{l-1} | e^k | a^{l+1} | \dots | a^n).$$

*Man beachte: Hier wird die $l$-te Spalte von $A$ durch den $k$-ten Standardbasisvektor ersetzt.*

*Beweis.* 1. Wir können durch Vertauschen von Zeilen ($k-1$-mal) und durch Vertauschen von Spalten ($l-1$-mal) die Matrix $A_{kl}$ in die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A'_{kl} \end{pmatrix}$$

bringen. Dann gilt

$$\det(A_{kl}) = (-1)^{(k-1)+(l-1)} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A'_{kl} \end{pmatrix} = (-1)^{k+l} \cdot \det(A'_{kl})$$

2. Man bemerke, dass sich die beiden Matrizen $A_{kl}$ und $(a^1|\dots|a^{l-1}|e^k|a^{l+1}|\dots|a^n)$ lediglich in der $k$-ten Zeile unterscheiden, bei $A_{kl}$ sind alle Einträge der $k$-ten Zeile Null, bis auf den Eintrag in der $l$-ten Spalte, dieser ist 1, bei $(a^1|\dots|a^{l-1}|e^k|a^{l+1}|\dots|a^n)$ stehen in der $k$-ten Zeile beliebige Einträge, allerdings ist der Eintrag in der $l$-ten Spalte auch gleich 1. Daher kann man durch Spaltenumformungen vom Typ III mit Hilfe dieses Eintrages alle anderen Einträge in der $k$-ten Zeile von $(a^1|\dots|a^{l-1}|e^k|a^{l+1}|\dots|a^n)$ zu Null machen, ohne die anderen Zeilen zu verändern. Man kann also durch diese Spaltenumformungen die Matrix $(a^1|\dots|a^{l-1}|e^k|a^{l+1}|\dots|a^n)$ in die Matrix $A_{kl}$ überführen, daher sind ihre Determinanten gleich.

□

Die Bedeutung der Komplementärmatrix ergibt sich aus folgendem Satz.

**Satz 6.18.** *Sei wie oben $A \in M(n \times n, K)$ und sei $A^\sharp \in M(n \times n, K)$ ihre Komplementärmatrix, dann gilt*

$$A^\sharp \cdot A = A \cdot A^\sharp = \det(A) \cdot E_n.$$

*Beweis.* Sei $A^\sharp \cdot A = (c_{ij})$, dann gilt

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \sum_{r=1}^{n} a^\sharp_{ir} \cdot a_{rj} \\ &= \sum_{r=1}^{n} a_{rj} \cdot \det(A_{ri}) \\ &= \sum_{r=1}^{n} a_{rj} \cdot \det(a^1|\dots|a^{i-1}|e^r|a^{i+1}|\dots|a^n) \\ &= \det(a^1|\dots|a^{i-1}|\sum_{r=1}^{n} a_{rj} \cdot e^r|a^{i+1}|\dots|a^n) \end{aligned}$$

Wegen $\sum_{r=1}^{n} a_{rj} \cdot e^r = a^j$ folgt

$$c_{ij} = \det(a^1|\dots|a^{i-1}|a^j|a^{i+1}|\dots|a^n)$$

Nun ist aber $\det(a^1|\dots|a^{i-1}|a^j|a^{i+1}|\dots|a^n) = 0$ falls $i \neq j$ ist, denn dann kommt die $j$-te Spalte von $A$ zweimal in dieser Matrix vor. Ist hingegen $i = j$, dann haben wir

$$\det(a^1|\dots|a^{i-1}|a^j|a^{i+1}|\dots|a^n) = \det(a^1|\dots|a^{i-1}|a^i|a^{i+1}|\dots|a^n) = \det(A).$$

Also erhalten wir insgesamt

$$c_{ij} = \delta_{ij} \cdot \det(A),$$

und damit ist $A^\sharp \cdot A = (\det(A)) \cdot E_m$. Ganz analog zeigt man, dass auch $A \cdot A^\sharp = (\det(A)) \cdot E_m$ gilt. □

Als elementare, aber nützliche Konsequenz erhält man ein weiteres Verfahren zur Berechnung der inversen Matrix.

**Korollar 6.19.** *Sei $A \in GL(n, K)$, dann ist*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^\sharp.$$

Beispielsweise gilt für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, K)$, dass

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

ist.
Wir können das Ergebnis von Satz 6.18 auch dazu benutzen, um eine weitere Methode zur Berechung von Determinanten zu erhalten.

**Satz 6.20** (Entwicklungssatz von Laplace)**.** *Sei $n > 1$ und $A \in M(n \times n, K)$ gegeben. Dann gilt für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$, dass*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(A'_{ij})$$

*Dies nennt man die Entwicklung der Determinante von $A$ nach der $i$-ten Zeile. Analog gilt für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$:*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(A'_{ij})$$

*dies ist die Entwicklung von* $\det(A)$ *nach der $j$-ten Spalte.*

*Beweis.* Wir beweisen nur die Formel für die Entwicklung nach der $i$-ten Zeile, die Entwicklung nach der $j$-ten Spalte kann man analog zeigen. Wegen des letzten Satzes steht in jedem Diagonaleintrag von $A \cdot A^\sharp$ die Determinante von $A$, es gilt also:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot a^\sharp_{ji} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \det(A_{ij}) = (-1)^{i+j} \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \det(A'_{ij})$$

□

Der letzte Satz ist besonders dann zur Berechnung der Determinante nützlich, wenn in einer Zeile oder Spalte der gegebenen Matrix viele Nullen stehen. Zum Beispiel ist

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 + 6 - 4 = 3,$$

wie man aus der Regel von Sarrus leicht ableiten kann. Man kann diese Determinante aber auch durch Entwicklung z.B. nach der ersten Zeile berechnen, nämlich

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 + 1 + 2 = 3.$$

Die Vorzeichen, welche im Laplaceschen Entwicklungssatz vorkommen, werden wie auf einem Schachbrett

verteilt, dies kann man sich so merken (hier für eine $8 \times 8$-Matrix):

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| + | − | + | − | + | − | + | − |
| − | + | − | + | − | + | − | + |
| + | − | + | − | + | − | + | − |
| − | + | − | + | − | + | − | + |
| + | − | + | − | + | − | + | − |
| − | + | − | + | − | + | − | + |
| + | − | + | − | + | − | + | − |
| − | + | − | + | − | + | − | + |

Eine weitere Anwendung betrifft das Lösen von quadratischen Gleichungssystemem. Hier gilt die folgende Aussage.

**Satz 6.21** (Regel von Cramer)**.** *Sei $A \in GL(n, K)$, sei $b \in M(n \times 1, K)$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Lösung $x = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$ des Gleichungssystems*

$$A \cdot x = b$$

*gegeben durch*

$$x_i = \frac{\det(a^1| \ldots |a^{i-1}|b|a^{i+1}| \ldots |a^n)}{\det(A)}$$

*gegeben.*

*Beweis.* Zunächst folgt aus $A \in \mathrm{GL}(n, K)$, dass $\mathrm{rk}(A) = n$ ist, also gibt es nach Lemma 5.41 eine eindeutige Lösung von $A \cdot x = b$. Durch Multiplikation von links dieser Matrixgleichung mit $A^{-1}$ sieht man, dass diese Lösung durch

$$x = A^{-1} \cdot b$$

gegeben ist. Sei $A^{-1} =: (d_{ij})$. Aus Lemma 6.17 und Korollar 6.19 schlussfolgern wir, dass

$$d_{ij} = \frac{\det(A_{ji})}{\det(A)} = \frac{\det(a^1| \ldots |a^{i-1}|e^j|a^{i+1}| \ldots |a^n)}{\det(A)}$$

gilt. Also ist

$$\begin{aligned} x_i = \sum_{j=1}^{n} d_{ij} b_j &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\det(a^1| \ldots |a^{i-1}|e^j|a^{i+1}| \ldots |a^n)}{\det(A)} \cdot b_j \overset{D1}{=} \frac{\det(a^1| \ldots |a^{i-1}| \sum_{j=1}^{n} b_j e^j|a^{i+1}| \ldots |a^n)}{\det(A)} \\ &= \frac{\det(a^1| \ldots |a^{i-1}|b|a^{i+1}| \ldots |a^n)}{\det(A)}. \end{aligned}$$

□

Zur Illustration der Cramerschen Regel wollen wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

lösen. Die zugehörige Koeffizientenmatrix ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

und es ist $\det(A) = 2$, was man zum Beispiel mit der Regel von Sarrus leicht nachrechnen kann. Andererseits ist

$$\tfrac{1}{\det(A)} \det(b|a^2|a^3) = \tfrac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -1$$

$$\tfrac{1}{\det(A)} \det(a^1|b|a^3) = \tfrac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\tfrac{1}{\det(A)} \det(a^1|a^2|b) = \tfrac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} = -1$$

und daher erhalten wir $x = {}^t(-1, 2, -1)$ als einzige Lösung des Systems $A \cdot x = b$.
Zum Abschluss dieses Abschnitts wollen wir Determinanten benutzen, um für beliebige Matrizen aus $\mathrm{M}(m \times n, K)$ ein Kriterium aufzustellen, welches es erlaubt, festzustellen, ob solch eine Matrix einen vorgegebenen Rang hat. Für eine quadratische Matrix haben wir schon in einem Spezialfall ein solches Kriterium, denn $A \in \mathrm{M}(n \times n, K)$ hat Rang $n$ genau dann, wenn $\det(A) = 0$ ist. Falls $\det(A) = 0$ ist, dann möchte man auch verstehen, wie klein der Rang werden kann. Dies funktioniert auch für nicht-quadratische Matrizen und führt zum Begriff des Minors

**Definition 6.22.** *Sei $A \in M(m \times n, K)$, sei $k \leqslant \min(m, n)$, und sei eine Matrix $A' \in M(k \times k, K)$ gegeben, so dass sich $A$ durch Zeilen-* und *Spaltenvertauschungen auf die Form*

$$\begin{pmatrix} A' & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

*bringen lässt, wobei an den mit $*$ bezeichneten Stellen beliebige Matrizen der entsprechenden Größen stehen. Dann heißt die Zahl*

$$\det(A')$$

*ein ($k \times k$-)*Minor *von $A$. Insbesondere ist $\det(A')$ ein Minor von $A$, falls sich $A'$ aus $A$ durch das Streichen von $m - k$ Zeilen und von $n - k$ Spalten ergibt.*

Die zentrale Aussage über Minoren ist die Folgende.

**Satz 6.23.** *Sei $A \in M(m \times n, K)$ und sei $r \leqslant \min(m, n)$. Dann sind äquivalent:*

1. *$r = \mathrm{rk}(A)$,*
2. *Es gibt einen $r \times r$-Minor von $A$, welcher ungleich Null ist, und für alle $k > r$ sind alle $k \times k$-Minoren von $A$ gleich Null.*

*Beweis.* Statt der Äquivalenz des Satzes beweisen wir lieber, dass für alle $k \leqslant \min(m, n)$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

**(a)** $\mathrm{rk}(A) \geqslant k$,

**(b)** es gibt einen $k \times k$-Minor $\det(A')$ von $A$, welcher nicht Null ist.

Dies geht folgerndermassen:

**(b) $\Rightarrow$ (a)** Wegen $\det(A') \neq 0$ gilt $\mathrm{rk}(A') = k$, also

$$\mathrm{rk} \begin{pmatrix} A' & * \\ * & * \end{pmatrix} \geqslant k$$

und da sich der Rang bei Zeilen- und Spaltenoperationen nicht ändert, folgt $\mathrm{rk}(A) \geqslant 0$.

**(a) ⇒ (b)** Angenommen, $\mathrm{rk}(A) \geqslant k$. Dann gibt es also $k$ linear unabhängige Zeilen in $A$, und wir können annehmen, dass dies die ersten $k$ Zeilen sind (sonst vertauschen wir Zeilen, was erlaubt ist, wenn wir einen Minor suchen). Sei jetzt $\widetilde{A}$ die $k \times n$-Matrix bestehend aus diesen ersten $k$-Zeilen von $A$. Da der Zeilenrang von $\widetilde{A}$ gleich dem Spaltenrang von $\widetilde{A}$ ist, muss es $k$ linear unabhängige Spalten in $\widetilde{A}$ geben, und wieder können wir annehmen, dass es die ersten $k$ Spalten sind. Dann sei $A'$ die $k \times k$-Teilmatrix von $\widetilde{A}$, welche aus diesen ersten $k$ Spalten besteht. Dann ist $A'$ eine Teilmatrix von $A$ (bis auf Zeilen- und Spaltenvertauschungen), d.h., $\det(A')$ ist ein $k \times k$-Minor von $A$, welcher ungleich Null ist, da nach Konstruktion $\mathrm{rk}(A') = k$ gilt.

□

# Kapitel 7

# Dualräume

Wir wollen hier kurz eine in vielen Bereichen wichtige Konstruktion behandeln, nämlich die des Dualaraumes eines Vektorraumes. Im nächsten Semester werden wir dieses Thema dann noch einmal aufgreifen, wenn wir verschiedene Hilfsmittel aus der bilinearen Algebra zur Verfügung haben.

**Definition 7.1.** *Sei $V$ ein $K$-Vektorraum. Dann setzen wir*

$$V^* := V^\vee := \{\varphi : V \longrightarrow K \,|\, \varphi \text{ ist linear } \} = Hom_K(V, K)$$

*$V^*$ ist ein $K$-Vektorraum und heißt der* Dualraum *von $V$. $\varphi \in V$ heißt eine* Linearform *auf $V$.*

Wir setzen ab jetzt in diesem Kapitel immer voraus, dass alle auftretenden Vektorräume endlich-dimensional sind. Allerdings wird in der Dualraum essentiell in vielen Gebieten der Analysis verwendet, und die dort betrachteten Vektorräume sind typischerweise nicht endlich-dimensional.

**Definition-Lemma 7.2.** *Sei $V$ ein $K$-Vektorraum und $V^*$ sein Dualraum. Sei $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von $V$. Für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ definieren wir eine Linearform $v_i^* \in V^*$ durch*

$$\begin{array}{rcl} v_i^* : V & \longrightarrow & K \\ v_j & \longmapsto & \delta_{ij} \end{array}$$

*Nach Lemma 5.15 ist die Linearform $v_i^*$ damit eindeutig definiert, man beachte aber, dass $v_i^*$ nicht nur vom Basiselement $v_i \in V$, sondern von der gesamten Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ abhängt.*
*Es gilt dann, dass die Familie der Linearformen $(v_1^*, \ldots, v_n^*)$ eine Basis von $V^*$ bildet. Sie heißt die zu $(v_1, \ldots, v_n)$* duale Basis *und wird mit $\mathcal{B}^*$ abgekürzt. Insbesondere gilt also* $\dim_K(V) = \dim_K(V^*)$.

*Beweis.* Tatsächlich folgt die letzte Aussage schon aus Korollar 5.16, aber es ist sicherlich instruktiv, dies hier noch einmal direkt zu beweisen, um die Idee des Dualraumes und der dualen Basis besser zu verstehen. Um gleichzeitig zu beweisen, dass die Familie $(v_1^*, \ldots, v_n^*)$ ein Erzeugendensystem von $V^*$ und linear unabhängig ist, wählen wir ein beliebiges $\varphi \in V^*$. Dann müssen wir zeigen, dass es genau ein Tupel $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ mit $\lambda_i \in K$ gibt, so dass $\varphi = \lambda_1 v_1^* + \ldots + \lambda_n v_n^*$ gilt. Dies ist eine Gleichheit von Elementen aus $V^*$, d.h. von linearen Abbildungen von $V$ nach $K$. Solch eine Gleichheit von Abbildungen ist erfüllt, wenn sie für alle $v \in V$ erfüllt ist, d.h., wenn für alle $v \in V$ gilt, dass $\varphi(v) = (\lambda_1 v_1^* + \ldots + \lambda_n v_n^*)(v)$ gilt. Da aber beide Abbildungen linear sind, reicht es, die Gleichheit nur für die Basiselemente $v_i \in V$ zu zeigen, d.h., es muss gelten

$$\varphi(v_i) = (\lambda_1 v_1^* + \ldots + \lambda_n v_n^*)(v_i) = \lambda_1 v_1^*(v_i) + \ldots + \lambda_n v_n^*(v_i)$$

Nun ist aber nach Definition der dualen Basis $v_j^*(v_i) = \delta_{ij}$, also ist die rechte Seite gleich $\lambda_i$. Wenn also die beiden Abbildungen $\varphi$ und $\lambda_1 v_1^* + \ldots + \lambda_n v_n^*$ gleich sein sollen, muss notwendig für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ $\lambda_i = \varphi(v_i)$ gelten, d.h., die Darstellung $\varphi = \lambda_1 v_1^* + \ldots + \lambda_n v_n^*$ ist eindeutig, und damit ist die Familie $v_1^*, \ldots, v_n^*$ linear unabhängig. Andererseits können wir das Tupel der Koeffizienten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ durch die Gleichungen $\lambda_i = \varphi(v_i)$ definieren, d.h., diese Familie ist auch ein Erzeugendensystem. □

Wir erhalten folgende Konsequenz:

**Korollar 7.3.** *1. Sei $v \in V\backslash\{0\}$. Dann existiert eine (nicht eindeutig bestimmte) Linearform $\varphi \in V^*$ mit $\varphi(v) \neq 0$.*

*2. Für jede Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ gibt es einen Isomorphismus*

$$\begin{array}{rcl} \Psi_{\mathcal{B}} : V & \longrightarrow & V^* \\ v_i & \longmapsto & v_i^* \end{array}$$

*Beweis.* Beide Aussagen folgen direkt aus der Konstruktion der dualen Basis, bei 1. verwendet man, dass man jedes Element $v \neq 0$ zu einer Basis von $V$ ergänzen kann. □

Man beachte, dass der Isomorphismus $\Psi_{\mathcal{B}}$ von der Wahl von $\mathcal{B}$ abhängig ist. In diesem Sinne sind die Vektorräume $V$ und $V^*$ isomorph, aber nicht kanonisch isomorph. Dies bedeutet, dass es einen Isomorphismus gibt, aber dieser hängt von weiteren Wahlen ab, man hat keine natürliche Wahl gegeben. Im Spezialfall $V = K^n$ ist die Situation angenehmer, da man hier die *kanonische* Basis $e_1, \ldots, e_n$ gegeben hat, kann man auch von einem kanonischen Isomorphismus $\Psi_{(e_1,\ldots,e_n)} : K^n \xrightarrow{\cong} (K^n)^*$ sprechen. Wir schreiben Linearformen als Zeilenvektoren, um die Unterscheidung zwischen Elementen von $K^n$ und $(K^n)^*$ klar zu machen. Dann gilt $e_i = {}^t(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ und $e_i^* = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$.
Um die Abhängigkeit von der Wahl einer Basis besser zu verstehen, sei als weiteres Beispiel $V = K^2$ und die Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ mit $v_1 = e_1$, $v_2 = {}^t(1, 1) = e_1 + e_2$ gewählt. Dann gilt: $e_1 = v_1$, $e_2 = v_2 - v_1$, so dass folgt

$$v_1^*(e_1) = v_1^*(v_1) = 1 \quad , \quad v_1^*(e_2) = v_1^*(v_2) - v_1^*(v_1) = -1$$

$$v_2^*(e_1) = v_2^*(v_1) = 0 \quad , \quad v_2^*(e_2) = v_2^*(v_1) - v_2^*(v_2) = 1.$$

Also erhalten wir

$$v_1^* = e_1^* - e_2^* = (1, -1) \qquad \text{und} \qquad v_2^* = e_2^* = (0, 1),$$

Man beachte, dass, obwohl $v_1 = e_1$ ist, $v_1^* \neq e_1^*$ gilt Dies liegt daran, dass allgemein, wie oben schon erwähnt, für eine Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ ein Element $v_i^*$ der dualen Basis nicht nur von $v_i$, sondern von allen Basiselementen der Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ abhängt. Da in unserem Beispiel $v_2 \neq e_2$ ist, gilt eben $v_1^* \neq e_1^*$. Wir können die durch die beiden Basen $\mathcal{A} = (e_1, e_2)$ und $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ definierten Isomorphismen zwischen $K^2$ und $(K^2)^*$ auch explizit angeben, nämlich

$$\Psi_{\mathcal{A}}(e_1) = e_1^* \qquad ; \qquad \Psi_{\mathcal{A}}(e_2) = e_2^*$$

$$\Psi_{\mathcal{B}}(e_1) = e_1^* - e_2^* \quad ; \quad \Psi_{\mathcal{B}}(e_2) = -e_1^* + 2e_2^*$$

Man beachte, dass die zweite Zeile aus $\Psi_{\mathcal{B}}(v_i) = v_i^*$ für $i \in \{1, 2\}$ folgt.
Interessant wird die Dualitätstheorie von Vektorräumen, wenn man zu einem gegebenen Raum $V$ auch noch Untervektorräume $u \subset V$ betrachtet.

**Definition 7.4.** *Sei $V$ ein $K$-Vektorraum und $U \subset V$ ein Untervektorraum. Dann heißt*

$$U^0 := \{\varphi \in V^* \mid \varphi(v) = 0 \ \forall v \in U\}$$

*der* Annullator *von $U$ in $V^*$.*

Es ist offensichtlich, dass $U^0 \subset V^*$ ein Untervektorraum ist. Im Folgenden berechnen wir seine Dimension.

**Lemma 7.5.** *Sei $U \subset V$ ein Untervektorraum, dann gilt*

$$\dim(U^0) = \dim(V) - \dim(U).$$

*Präziser gilt folgende Aussage: Sei $u_1, \ldots, u_k$ eine Basis von $U$, welche wir zu einer Basis*

$$\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_r)$$

*von $V$ ergänzen. Dann bilden die Linearformen $v_1^*, \ldots, v_r^*$ (welche Teil der zu $\mathcal{B}$ dualen Basis von $V^*$ sind) eine Basis von $U^0$.*

*Beweis.* Es ist klar, dass die erste Aussage, also die Formel zur Bestimmung der Dimension von $U^0$ aus der zweiten Aussage folgt. Auch klar ist, dass $v_1^*, \ldots, v_r^*$ linear unabhängig in $V^*$ sind, denn sie sind Teil einer Basis (der dualen Basis von $\mathcal{B}$). Es ist also zu zeigen, dass sie ein Erzeugendensystem des Untervektorraumes $U^0$ bilden. Zunächst überzeugen wir uns, dass es sich überhaupt um Elemente von $U^0$ handelt, d.h., dass für alle $u \in U$ gilt, dass $v_i^*(u) = 0$ ist. Dies ist klar, denn nach Konstruktion der dualen Basis haben wir $v_i^*(u_j) = 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, r\}$ und alle $j \in \{1, \ldots, k\}$. Es gilt also $\mathrm{Span}\,(v_1^*, \ldots, v_r^*) \subset U^0$. Um die umgekehrte Inklusion zu zeigen, wählen wir $\varphi \in U^0$. Da $(u_1^*, \ldots, u_k^*, v_1^*, \ldots, v_r^*)$ eine Basis von $V^*$ ist, existieren Koeffizienten $\mu_1, \ldots, \mu_k, \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$ mit

$$\varphi = \mu_1 u_1^* + \ldots + \mu_k u_k^* + \lambda_1 v_1^* + \ldots + \lambda_r v_r^*$$

Wegen $\varphi(u_i) = 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$ folgt $\mu_i = 0$, d.h., es gilt

$$\varphi = \lambda_1 v_1^* + \ldots + \lambda_r v_r^*$$

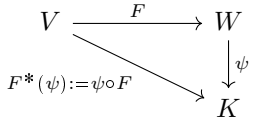
und somit ist $(v_1^*, \ldots, v_r^*)$ ein Erzeugendensystem von $U^0$. □

Nachdem wir duale Vektorräume betrachtet haben, kommen wir zu dualen Abbildungen.

**Definition 7.6.** *Seien $V, W$ Vektorräume und $F : V \to W$ eine linear Abbildung. Dann definieren wir die zu $F$ duale Abbildung, geschrieben $F^* : W^* \to V^*$ (man beachte die Umkehrung der Reihenfolge), durch*

$$F^*(\psi) := \psi \circ F$$

*für alle $\varphi \in W^*$. Dies kann man am besten mit dem folgenden Diagramm veranschaulichen:*




Um zu zeigen, dass die $F^*$ wohldefiniert ist, muss man natürlich nachrechnen, dass $F^*(\psi)$ nicht nur eine beliebige Abbildung von $V$ nach $K$, sondern auch linear ist. Es gilt für alle $v, w \in V$ und alle $\lambda \in K$, dass

$$\begin{aligned} F^*(\psi)(\lambda v + w) &= (\psi \circ F)(\lambda v + w) \overset{F \text{ linear}}{=} \psi(\lambda F(v) + F(w)) \\ &\overset{\psi \text{ linear}}{=} \lambda\psi(F(v)) + \psi(F(w)) = \lambda F^*(\psi)(v) + F^*(\psi)(w) \end{aligned}$$

Damit haben wir $F^*(\psi) \in V^*$. Man kann genauso einfach nachrechnen, dass $F^*$ keine beliebige Abbildung zwischen $W^*$ und $V^*$, sondern ein Element von $\mathrm{Hom}_K(W^*, V^*)$, also eine lineare Abbildung ist. Daher ist die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_K(V, W) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_K(W^*, V^*) \\ F & \longmapsto & F^* \end{array}$$

wohldefiniert. Wiederum kann man leicht nachrechnen, dass auch sie linear und sogar ein Isomorphismus von Vektorräumen ist. Da wir uns hier nur auf endlich-dimensionale Vektorräume beschränken, können wir lineare Abbildungen bezüglich Basen wieder durch Matrizen darstellen, und dann läßt sich die Tatsache, dass diese Abbildung ein Isomorphismus ist, sehr viel direkter formulieren.

**Satz 7.7.** *Sei $V$ ein Vektorraum mit Basis $\mathcal{A}$, $W$ ein Vektorraum mit Basis $\mathcal{B}$ und sei $F \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$. Dann gilt für die darstellenden Matrizen von $F$ und $F^*$:*

$$^t(M_{\mathcal{A}^*}^{\mathcal{B}^*}(F^*)) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F).$$

In Worten ausgedrückt bedeutet dieser Satz, dass die duale Abbildung bezüglich der dualen Basis durch die Transponierte der die ursprüngliche Abbildung darstellenden Matrix gegeben ist.

*Beweis.* Sei $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ und sei $\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_m)$ und wir schreiben $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F) = (a_{ij})$ mit $i \in \{1, \ldots, m\}$ und $j \in \{1, \ldots, n\}$. Dann gilt nach Definition von $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$ (siehe Satz 5.17), dass $F(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$ ist. Auf diese Gleichung (welche eine Gleichheit von Elementen aus $W$ ist), wenden wir die Linearform $w_i^*$ an (für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$), und erhalten

$$w_i^*(F(v_j)) = \sum_{k=1}^{m} a_{kj} w_i^*(w_k) = a_{ij}$$

Nach Definition der dualen Abbildung ist aber $w_i^*(F(v_j)) = (w_i^* \circ F)(v_j) = F^*(w_i^*)(v_j)$, d.h., wir haben bewiesen, dass gilt:

$$F^*(w_i^*)(v_j) = a_{ij} \tag{7.1}$$

Wir schreiben jetzt $M_{\mathcal{A}^*}^{\mathcal{B}^*}(F^*) = (b_{ji})$ für die darstellende Matrix der dualen Abbildung $F^*$. Dann gilt wieder

$$F^*(w_i^*) = \sum_{j=1}^{n} b_{ji} v_j^*$$

Dies ist eine Gleichheit von Elementen aus $V^*$, also von Linearformen auf $V$, d.h., wir können beide Seiten der Gleichung auf den Vektor $v_j \in V$ anwenden und erhalten

$$F^*(w_i^*)(v_j) = \sum_{l=1}^{n} b_{li} v_l^*(v_j) = b_{ji} \tag{7.2}$$

Wenn wir die Gleichungen (7.1) und (7.2) zusammenfassen, bekommen wir

$$a_{ij} = b_{ji}.$$

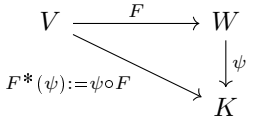
□

Für jede lineare Abbildung hatten wir im Kapitel 5 den Kern und das Bild definiert. Nun untersuchen wir, welcher Zusammenhang mit den entsprechenden Untervektorräumen der dualen Abbildung besteht.

**Satz 7.8.** *Sei $F \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$, dann gilt*

$$\ker(F)^0 = \mathrm{Im}(F^*) \qquad \textit{und} \qquad \mathrm{Im}(F)^0 = \ker(F^*)$$

*Beweis.* Zur Veranschaulichung betrachten wir erneut das Diagramm, welches zur Definition der dualen Abbildung benutzt wurde:




Wir zeigen zunächst die Inklusion $\mathrm{Im}(F^*) \subset \ker(F)^0$: Sei $\varphi \in \mathrm{Im}(F^*) \subset V^*$, dann existiert $\psi \in W^*$ mit $\varphi = \psi \circ F$. Dann gilt aber natürlich $\varphi_{|\ker(F)} = 0$, denn für alle $v \in \ker(F)$ ist $\varphi(v) = \psi(F(v)) = 0$. Also haben wir $\varphi \in \ker(F)^0$.
Wollen wir andererseits $\mathrm{Im}(F^*) \supset \ker(F)^0$ zeigen, dann wählen wir ein $\varphi \in V^*$ und nehmen an, dass $\varphi(v) = 0$ für alle $v \in \ker(F)$ ist. Wir benutzen jetzt die fundamentale Konstruktion aus Satz 5.12 zur Konstruktion von an eine gegebene Abbildung angepassten Basen: Sei $\mathcal{A} = (u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_k)$ eine Basis von $V$, $\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_r, w_{r+1}, \ldots, w_m)$ eine Basis von $W$ mit $\ker(F) = \mathrm{Span}\,(v_1, \ldots, v_k)$, $\mathrm{Im}(F) = \mathrm{Span}\,(w_1, \ldots, w_r)$ und $F(u_i) = w_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, r\}$. Nun definieren wir eine Linearform $\psi \in W^*$ durch

$$\psi(w_i) = \begin{cases} \varphi(u_i) & \text{für } i = 1, \ldots, r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Da $w_1, \ldots, w_m$ eine Basis von $W$ ist, ist nach Lemma 5.15 die $\psi \in W^*$ eindeutig bestimmt. Darüber hinaus gilt aber offensichtlich $\varphi = \psi \circ F$, denn $\psi(F(u_i)) = \psi(w_i) = \varphi(u_i)$ für alle $i \in \{1, \ldots, r\}$, und für alle $v \in \ker(F)$ gilt $\varphi(v) = 0$ nach Voraussetzung (wir hatten $\varphi \in \ker(F)^0$) angenommen, und natürlich ist $(\psi \circ F)|\ker(F) = 0$. Also ist $\varphi = F^*(\psi)$, und daher $\varphi \in \mathrm{Im}(F^*)$.
Ganz analog beweist man die zweite Gleichheit. Wir werde weiter unten (siehe Korollar 7.14) sehen, dass die zweite Gleichheit auch abstrakt aus der ersten folgt. □

Als Konseqenz können wir einen neuen, sehr viel abstrakteren Beweis der Gleichheit von Zeilen- und Spaltenrang einer Matrix angeben.

**Korollar 7.9.** *1. Für alle $F \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ gilt $\mathrm{rk}(F) = \mathrm{rk}(F^*)$.*

*2. Für alle $A \in M(m \times n, K)$ gilt Zeilenrang$(A)$ = Spaltenrang$(A)$.*

*Beweis.* 1. Es gilt

$$\mathrm{rk}(F^*) = \dim(\mathrm{Im}(F^*)) \overset{7.8}{=} \dim(\ker(F)^0) \overset{7.5}{=} \dim(V) - \dim(\ker(F)) \overset{5.12}{=} \dim(\mathrm{Im}(F)) = \mathrm{rk}(F).$$

2. Sei $F_A : K^n \to K^m$ die lineare Abbildung, welche durch Rechtsmultiplikation mit $A$ gegeben ist. Dann ist nach Satz 7.7 die darstellende Matrix von $F_A^*$ bezüglich der dualen Basen (dies sind wieder die Standardbasen von $K^n$, geschrieben als Zeilenvektor) gleich ${}^tA$. Also folgt aus 1., dass

$$\text{Spaltenrang}(A) = \mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(F_A) \overset{1.}{=} \mathrm{rk}(F_A^*) = \mathrm{rk}({}^tA) = \text{Spaltenrang}({}^tA) = \text{Zeilenrang}(A)$$

ist.

□

Wir haben weiter oben gesehen, dass ein Vektorraum $V$ und sein Dualraum $V^*$ zwar isomorph als Vektorräume sind, denn für jede Wahl einer Basis $\mathcal{B}$ von $V$ erhält man den Isomorphismus $\Psi_B : V \to V^*$, aber dieser Isomorphismus hängt eben von der Wahl von $\mathcal{B}$ ab. Im nächsten Schritt konstruieren wir einen Raum, welcher *kanonisch* zu $V$ isomorph ist, d.h. es gibt einen Isomorphismus zwischen diesen beiden Räumen, welchen man abstrakt angeben kann, ohne vorher irgendwelche Wahlen getroffen zu haben. Die Idee ist, die Dualitätskonstruktion von $V$ zu $V^*$ einfach zu wiederholen, d.h., auf $V^*$ selbst anzuwenden.

**Definition 7.10.** *Sei $V$ ein $K$-Vektorraum. Sei $W := V^*$, dann ist $W$ auch ein $K$-Vektorraum, und wir können seinen Dualraum $W^*$ betrachten. Dieser wird mit $V^{**}$ bezeichnet und heißt* Doppeldualraum *von $V$.*

Dann haben wir:

**Lemma 7.11.** *Sei $V$ wie oben und sei $v \in V$, dann definieren wir die Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} \iota_v : V^* & \longrightarrow & K \\ \varphi & \longmapsto & \varphi(v) \end{array}$$

*$\iota_v$ ist linear, d.h., ein Element von $(V^*)^* = V^{**}$. Wenn (wie in diesem Kapitel sowieso immer vorausgesetzt) $\dim_K(V) < \infty$ gilt, dann ist die Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} \iota : V & \longrightarrow & V^{**} \\ v & \longmapsto & \iota_v \end{array}$$

*ein Isomorphismus von $K$-Vektorräumen. Er ist kanonisch, d.h., er hängt nicht von der Wahl von Basen ab.*

Man beachte, dass die letzte Aussage im Allgemeinen falsch ist, wenn $V$ unendlich-dimensional ist.

*Beweis.* Die Linearität von $\iota_v$ ist direkt offensichtlich, denn für $\varphi, \psi \in V^*$ und $\lambda \in K$ ist $(\lambda\varphi + \psi)(v) = \lambda\varphi(v) + \psi(v)$. Als nächstes müssen wir zeigen, dass die Abbildung $\iota$ linear ist, dies folgt, weil für alle $v, w \in V$, $\lambda \in K$ und alle $\varphi \in V^*$ gilt

$$\iota_{\lambda v+w}(\varphi) = \varphi(\lambda v + w) = \lambda\varphi(v) + \varphi(w) = \lambda\iota_v(\varphi) + \iota_w(\varphi).$$

Für den Beweis der letzten Aussage sei nochmals erwähnt, dass die Abbildung $\iota$ kanonisch gegeben ist, denn wir benötigen keine Basis, um $\iota$ definieren zu können. Wenn wir aber eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ von $V$ wählen, dann haben wir die duale Basis $\mathcal{B}^*$ und die dazu duale Basis $(\mathcal{B}^{**}) := (\mathcal{B}^*)^*$ von $V^*$. Dann sieht man sofort, dass $\iota_{v_i} = v_i^{**}$ gilt, denn $\iota_{v_i}(v_j^*) = (v_j^*)(v_i)$ nach Definition von $\iota$, und $(v_j^*)(v_i) = \delta_{ij}$. Daher ist $\iota$ ein Isomorphismus. □

Es sei hier noch einmal betont, dass $\iota$ zunächst kanonisch definiert wird, ohne irgendwelche Wahlen zu treffen. Zum Beweis, dass $\iota$ ein Isomorphismus ist, verwendet man dann eine Basis, aber die Abbildung $\iota$ hängt nicht von dieser Wahl ab.
Da wir also nun einen kanonischen Isomorphismus zwischen $V$ und $V^{**}$ haben, können wir in der Praxis beide Vektorräume identifizieren, d.h., wir schreiben für $v \in V$ auch $v \in V^{**}$ anstatt $\iota_v$. Wir schreiben häufig auch $V = V^{**}$, und meinen damit den kanonischen Isomorphismus $\iota : V \to V^{**}$. Dann gilt also nach Definition

$$\varphi(v) = v(\varphi)$$

für alle $\varphi \in V^*$.

**Korollar 7.12.** *Sei $F \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$, dann ist $F^{**} = F$, wobei wir $\mathrm{Hom}_K(V^{**}, W^{**})$ unter Benutzung von $V = V^{**}$ und $W = W^{**}$ mit $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ identifiziert haben.*

*Beweis.* Sei $v \in V$ gegeben, dann ist zu zeigen, dass

$$F^{**}(\iota_v) = \iota_{F(v)}$$

gilt (wobei wir hier zur Klarheit ausnahmsweise noch einmal die Notation $\iota_v \in V^{**}$ statt $v \in V^{**}$ verwendet haben). Dies ist eine Gleicheit von Elementen von $W^{**}$, man muss also für alle $\psi \in W^*$ zeigen, dass

$$F^{**}(\iota_v)(\psi) = \iota_{F(v)}(\psi)$$

gilt. Nun ist aber $F^{**}(\iota_v)(\psi) = \iota_v(F^*(\psi)) = F^*(\psi)(v) = \psi(F(v))$, aber andererseits ist nach Definition $\iota_{F(v)}(\psi) = \psi(F(v))$. □

Wir besprechen nun, wie sich die Konstruktion des Annullators bei Verwendung des Doppeldualraumes verhält.

**Lemma 7.13.** *Sei $W \subset V$ ein Untervektorraum, dann gilt*

$$(W^0)^0 = W \subset V = V^{**}$$

*Beweis.* Zweimaliges Anwenden der Dimensionsformel in Lemma 7.5 liefert, dass $\dim((W^0)^0) = \dim(W)$ ist, daher reicht es, die Inklusion $(W^0)^0 \supset W$ zu zeigen. Sei $w \in W$, dann gilt für alle $\varphi \in W^0$, dass $\varphi(w) = 0$ ist. Dann aber ist $w(\varphi) = 0$, wobei hier $w$ als Element von $V^{**}$ aufgefasst wird. Also ist $w \in (W^0)^0$. □

Als Konsequenz aus den letzten beiden Resultaten können wir die zweite Gleichung von Satz 7.8 aus der ersten, welche wir dort tatsächlich bewiesen hatten, folgern.

**Korollar 7.14.** *Für alle $F \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ gilt $\mathrm{Im}(F)^0 = \ker(F^*)$.*

*Beweis.* Wir gehen von der Gleichung $\ker(F)^0 = \mathrm{Im}(F^*)$ aus Satz 7.8 aus, welche schon bewiesen wurde. Wir verwenden diese Gleichung jetzt aber für die lineare Abbildung $F^* \in \mathrm{Hom}_K(W^*, V^*)$, d.h., es gilt

$$\ker(F^*)^0 = \mathrm{Im}(F^{**}),$$

aber wegen Korollar 7.12 ist $\mathrm{Im}(F^{**}) = \mathrm{Im}(F)$, d.h., wir haben

$$\ker(F^*)^0 = \mathrm{Im}(F).$$

Wir schlussfolgern, dass auch

$$(\ker(F^*)^0)^0 = \mathrm{Im}(F)^0$$

gilt, und aus Lemma 7.13 folgt $(\ker(F^*)^0)^0 = \ker(F^*)$, so dass wir insgesamt

$$\ker(F^*) = \mathrm{Im}(F)^0$$

bekommen. □

Wir können die obigen, doch recht abstrakten Überlegungen dafür nutzen, das Problem des Lösens von linearen Gleichungssystemen aus einem neuen Blickwinkel zu betrachten. Sei $A \in \mathrm{M}(m \times n, K)$ und sei das homogene System

$$A \cdot x = 0$$

gegeben. Sei weiterhin $W := \mathrm{Lös}\,(A, 0) \subset K^n$. Die Zeilen $a_1, \ldots, a_m$ von $A$ sind Zeilenvektoren in $\mathrm{M}(1 \times n, K)$, und wir können sie daher als Elemente von $(K^n)^*$, also als Linearformen auf $K^n$ auffasen. Dann sei $U := \mathrm{Span}\,(a_1, \ldots, a_m) \subset (K^n)^*$. Natürlich ist $\dim(U) = \mathrm{rk}(A)$. Nun ist der neue Aspekt, dass der Lösungsraum $W$, gesehen als Untervektorraum von $V^{**}$ nichts anderes als der Annullator $U^0$ von $U$ ist, denn für alle $x \in W$ und alle $\varphi \in U$ gilt $x(\varphi) = \varphi(x) = 0$ und andererseits gibt jedes $x \in U^0$ eine Lösung des Systems, d.h., ein Element von $W$. Wollen wir also das gegebene Gleichungssystem lösen, dann heisst das, das wir zu vorgegebenem $U$ eine Basis des Annullators $U^0 \subset V$ finden müssen, diese ist dann die Fundamentallösung. Außerdem liefert uns die Dimensionsformel für den Annullator (also Lemma 7.5), dass $\dim(U) + \dim(W) = n$ ist, was wiederum der „klassischen “ Dimensionsformel (Satz 5.12) entspricht, wenn wir $A$ als lineare Abbildung von $K^n$ nach $K^m$ auffassen.
Wir können diese Prozedur auch umkehren, d.h. in diesem Kontext, dualisieren: Sei ein Untervektorraum $W \subset K^n$ gegeben, dann suchen wir das lineare Gleichungssystem, welches genau diesen Vektorraum als Lösung hat, mit anderen Worten, wir suchen eine Matrix $A$ mit $\mathrm{Lös}\,(A, 0) = W$. Wie oben können wir die Zeilen dieser Matrix, wieder als Linearformen auf $K^n$ interpretieren, so dass das Problem darin besteht, ein Erzeugendensystem von $U := W^0 \subset (K^n)^*$ zu finden. Dann ist wegen Lemma 7.13 notwendigerweise $U^0 = W$. Sei nun ganz praktisch der Untervektorraum $W \subset K^n$ durch Spaltenvektoren $w_1, \ldots, w_l \subset K^n$ gegeben, d.h., $W = \mathrm{Span}\,(w_1, \ldots, w_l)$. Wir bilden aus diesen eine $n \times l$-Matrix $X$, und dann gilt

$$U = \{a \in (K^n)^* \mid a \cdot X = 0\}$$

Durch Transponieren sehen wir, dass wir also das lineare Gleichungssystem

$${}^tX \cdot {}^ta = 0$$

lösen müssen. Eine Basis von $\mathrm{Lös}\,({}^tX, 0)$ besteht aus Spaltenvektoren in $K^n$, und die entsprechend transponierten Zeilenvektoren bilden dann die Matrix $A$. Wenn $\dim(W) = k \leqslant l$ ist, dann folgt $\mathrm{rk}(A) = n - k =: r$, und wir haben $A \in \mathrm{M}(r \times n, K)$. Es gilt dann die folgende Matrixgleichung in $\mathrm{M}(r \times l, K)$.

$$A \cdot X = 0.$$

Wir betrachten ein Beispiel: seien

$$w_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad w_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und $W = \mathrm{Span}\,(w_1, w_2) \subset \mathbb{R}^3$. Wir suchen ein Gleichungssystem, dessen Lösungsraum genau gleich $W$ ist. Wir bilden also die Matrix

$$ {}^tX = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} $$

Dann ist $\mathrm{Lös}\,({}^tX, 0) = \mathrm{Span}\,({}^t(-2,1,1)) \subset \mathbb{R}^3$, also ist $U = \mathrm{Span}\,((-2,1,1)) \subset (\mathbb{R}^3)^*$, und damit ist $W$ der Lösungsraum des Gleichungssystems

$$ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0. $$

# Literaturverzeichnis

[1] Gerd Fischer, *Lineare Algebra*, Vieweg+Teubner, 17.Auflage (2010).