Übungen zur Linearen Algebra

1. Bestimmen Sie die Determinante folgender Matrizen

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T$, (c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Berechnen Sie die Determinante folgender reeller $n \times n$ Matrizen

(a) $A(x,y) = \begin{bmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & \cdots & x \end{bmatrix}$, (b) $S_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \\ \vdots & & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,

(c) $\operatorname{tridiag}(1,-2,1) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & & 1 & -2 \end{bmatrix}$, (d) $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$,

(e) $A(a_i)_{i=1}^n = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} + \operatorname{diag}(a_i)_{i=1}^n$.

3. Eine Matrix, bei der in jeder Zeile und jeder Spalte genau eine Eins und sonst Nullen stehen, heißt **Permutationsmatrix**. Welche Werte kann die Determinante einer Permutationsmatrix annehmen?

4. Es sei $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ **schiefsymmetrisch**, d. h. $A^T = -A$. Man zeige, dass $\det A = 0$ gilt, falls n ungerade ist.

5. (a) Es sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine **orthogonale Matrix**, d. h. $A^{-1} = A^T$. Man zeige, dass $|\det A| = 1$.
   (b) Es sei $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ eine **unitäre Matrix**, d. h. $A^{-1} = \overline{A}^T$. Gilt auch $|\det A| = 1$?

6. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\omega_n = \mathrm{e}^{2\pi \mathbf{i}/n} = \cos\frac{2\pi}{n} + \mathbf{i}\sin\frac{2\pi}{n}$. Wir betrachten die Matrix der **diskreten Fouriertransformation**

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left[\omega_n^{jk}\right]_{j,k=0}^{n-1}.$$

   (a) Zeigen Sie, dass F_n symmetrisch, sogar unitär ist.
   (b) Zeigen Sie, dass $F_n^4 = I_n$ ist.

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Hausaufgaben- und Übungsblätter, etc.) sind unter

`https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/LinAlg1-WS1617/linalg1.php`

zu finden.