Übungen zur Linearen Algebra

1. Man bestimme den Rang folgender (reeller) Matrizen.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, (c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, (d) $\begin{bmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{bmatrix}$.

2. Geben Sie für folgende (reelle) Matrizen A_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ eine Basis in $\ker A_i$ und $\operatorname{im} A_i$ an:

(a) $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, (b) $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{bmatrix}$ $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, (c) $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

(d) $A_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Untersuchen Sie, ob die Vektoren $b_1 = e_1,\ b_2 = b_4 = [1, a^3, b^3]^T,\ b_3 = (1, 1)^T$ Elemente der Bildmenge $\operatorname{im} A_i$ sind, d. h. ob $b_i \in \operatorname{im} A_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ gilt!

3. Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ und $[A]$ die diesem Operator zugeordnete Matrix (bzgl. der kanonischen Basis). Zeigen Sie, dass $\operatorname{rang}[A] = r$ dann und nur dann gilt, wenn in $\mathbb{C}^n$ zwei jeweils unabhängige Systeme von Vektoren $\{x_i\}_{i=1}^r,\ \{y_i\}_{i=1}^r$ existieren, so dass $[A]$ die Darstellung gestattet:

$$[A] = \sum_{i=1}^{r} x_i y_i^T. \tag{1}$$

Lässt sich die Aussage auf $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$ verallgemeinern?

4. Wir betrachten folgende spezielle Matrizen der Ordnung n.

$I_n = [\delta_{ij}]_{i,j=0}^{n-1}$	(Einheitsmatrix)	$J_n = [\delta_{i,n-1-j}]_{i,j=0}^{n-1}$	(Flipmatrix)
$U_n = [\delta_{i,j+1}]_{i,j=0}^{n-1}$	(Verschiebungsmatrix)	$D_n = \operatorname{diag}(c_i)_{i=0}^{n-1}$	(Diagonalmatrix)
$T_n = [t_{i-j}]_{i,j=0}^{n-1}$	(Toeplitzmatrix)	$H_n = [h_{i+j}]_{i,j=0}^{n-1}$	(Hankelmatrix)
$V_n = \left[v_i^j\right]_{i,j=0}^{n-1}$	(Vandermondematrix)	$C_n = \left[\dfrac{1}{b_j - c_j}\right]_{i,j=0}^{n-1}$	(Cauchymatrix)

(a) Zeigen Sie, dass $H_n = H_n^T,\ J_n^2 = I_n,\ J_n T_n J_n = T_n^T$ gilt.

(b) Bestimmen Sie den Rang folgender Matrizen sowie deren Rangzerlegung (1).
i. $T_n U_n - U_n T_n$, ii. $H_n U_n - U_n^T H_n$, iii. $V_n U_n - \operatorname{diag}(v_i)_{i=0}^{n-1} V_n$,
iv. $C_n \operatorname{diag}(b_i)_{i=0}^{n-1} - \operatorname{diag}(c_i)_{i=0}^{n-1} C_n$, $c_i \neq b_j$ für alle Paare i, j.

(c) Seien T_n, H_n reguläre Matrizen. Welche Aussagen kann man dann über den Rang von $T_n^{-1} U_n - U_n T_n^{-1}$ und $H_n^{-1} U_n - U_n^T H_n^{-1}$ machen?

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Hausaufgaben- und Übungsblätter, etc.) sind unter

`https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/LinAlg1-WS1617/linalg1.php`

zu finden.