

Übungen zur Linearen Algebra

1. Eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ habe die Matrixdarstellung

$$[A]_{B_2}^{B_1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

wobei B_1, B_2 folgende Basen des \mathbb{R}^3 bzw. \mathbb{R}^2 bezeichnet:

$$B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Wie sieht die Matrixdarstellung von A bezüglich der kanonischen Basen E_1, E_2 des $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2$ aus?

2. Im $\mathbb{R}[t]_2$ seien die Basen $B_1 = \{1, t, t^2\}$, $B_2 = \{2 + t - t^2, 2 - t + 2t^2, 3 + t^2\}$ gegeben.

- (a) Bestimmen Sie die Basistransformationsmatrizen $T_{B_2}^{B_1}$ und $T_{B_1}^{B_2}$!
(b) Geben Sie die Koordinaten der Polynome

$$p(t) = 1 + t + t^2 \quad \text{und} \quad q(t) = p(t) + (2 - t)(1 + t)$$

in beiden Basen an (vgl. Aufgabe 9.5 (c))!

Lösen Sie Aufgabe 5 (b) und 5 (d) mithilfe von Basisübergangsmatrizen.

3. Geben Sie unter Zuhilfenahme von Basistransformationsmatrizen für den Differentialoperator $D : \mathbb{R}[t]_2 \rightarrow \mathbb{R}[t]_2$ die Matrixdarstellung $[D]_B^B$ an, wobei B die folgende Basis des $\mathbb{R}[t]_2$ bezeichnet:

$$B = \{(t - 1)^2, t^2, (t + 1)^2\}.$$

4. (a) Sind die Matrizen $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} d & c \\ b & a \end{bmatrix}$ ($a, b, c, d \in \mathbb{C}$) äquivalent oder sogar ähnlich?
(b) Bestimmen Sie alle zu $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ähnlichen (reellen) Matrizen!
(c) Sind folgende Matrizen aus $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ ähnlich:

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \quad B = \text{diag}(a + ib, a - ib) \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R})?$$

5. Seien A, B Matrizen mit komplexen Einträgen der Größe $m \times n$ bzw. $n \times k$. Zeigen Sie, dass $\text{rang } A \cdot B \leq \min\{\text{rang } A, \text{rang } B\}$ gilt.

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Hausaufgaben- und Übungsblätter, etc.) sind unter

<https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/LinAlg1-WS1617/linalg1.php>

zu finden.