Übungen zur Linearen Algebra

1. Untersuchen Sie, ob folgende Abbildungen linear sind!
   (a) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1,\ A(x, y, z) = x + 2y + 3z,$
   (b) $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ A(x, y) = (x + y, x - y),$
   (c) $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ A(x_i)_{i=1}^n = (|x_i|)_{i=1}^n,$
   (d) $A : \mathbb{K}[t] \to \mathbb{K}[t],\ (Af)(t) = tf(t),$
   (e) $A : \mathbb{R}[t]_n \to \mathbb{R}_{2n}[t],\ (Af)(t) = f(t^2),$
   (f) $A : \mathbb{K}[t] \to \mathbb{K}[t],\ (Af)(t) = f(2t + 4),$
   (g) $A : \mathbb{R}[t]_n \to \mathbb{R}[t]_n,\ (Af)(t) = f'(t),$
   (h) $A : \mathrm{Abb}([0, 1], \mathbb{R}) \to \mathrm{Abb}([0, 1], \mathbb{R}),\ (Af)(t) = f(0),$
   (i) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ A(x, y, z) = a$ ($a \in \mathbb{R}^3$ konst.),
   (j) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ A(x, y, z) = (x, y, z) + a,$
   (k) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1,\ A(x, y, z) = x^2 + 2y,$
   (l) $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ A(x_i)_{i=1}^n = \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i, 0, \ldots, 0\right),\ a_i \in \mathbb{R}.$

2. Welche der Abbildungen aus Aufgabe 1 sind Vektorraumisomorphismen?

3. Sei V ein Vektorraum, $A \in \mathcal{L}(V, V)$. Gilt $A^2 \in \mathcal{L}(V, V)$, wobei
$$A^2x = A(Ax),\ x \in V?$$

4. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *symmetrisch*, falls $A = A^T$. A heißt *schiefsymmetrisch* (*alternierend*), falls $A = -A^T$.
   (a) Zeigen Sie, dass die symmetrischen Matrizen einen Untervektorraum $\mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ von $\mathbb{R}^{n\times n}$ bilden. Geben Sie die Dimension und eine Basis von $\mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ an.
   (b) Zeigen Sie, dass die schiefsymmetrischen Matrizen einen Untervektorraum $\mathrm{Alt}(n, \mathbb{R})$ von $\mathbb{R}^{n\times n}$ bilden. Bestimmen Sie auch für $\mathrm{Alt}(n, \mathbb{R})$ die Dimension und eine Basis.
   (c) Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei $A_s := \frac{1}{2}(A + A^T)$ und $A_a := \frac{1}{2}(A - A^T)$. Zeigen Sie: A_s ist symmetrisch, A_a ist schiefsymmetrisch und es gilt $A = A_s + A_a$.
   (d) Es gilt: $\mathbb{R}^{n\times n} = \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R}) \oplus \mathrm{Alt}(n, \mathbb{R})$.

5. In $\mathbb{R}[t]_2$ seien die folgenden Mengen von Polynomen gegeben:
$$\begin{aligned} B_1 &= \{1, t, t^2\},\\ B_2 &= \{1 + t, t - 1, t^2 + 2t\},\\ B_3 &= \{2 + t - t^2, 2 - t + 2t^2, 3 + t^2\}. \end{aligned}$$
   (a) Zeigen Sie, dass B_2 und B_3 Basen von $\mathbb{R}[t]_2$ bilden!
   (b) Geben Sie die Koordinaten des Polynoms $p(t) = 1 + t + t^2$ in den Basen B_1, B_2, B_3 an!
   (c) Geben Sie für die lineare Abbildung
$$A : \mathbb{R}[t]_2 \to \mathbb{R}[t]_2,\ (Ap)(t) = p(2t)$$
   die Matrixdarstellungen
$$[A]_{B_1,B_1},\ [A]_{B_2,B_1},\ [A]_{B_2,B_2},\ [A]_{B_3,B_1}$$
   an!

6. Geben Sie die Matrixdarstellung $[A]$ bezüglich der kanonischen Basen für folgende Abbildungen an:
   (a) Die linearen Abbildungen aus Aufgabe 1.
   (b) $A : \mathbb{R}[t]_n \to \mathbb{R}[t],\ (Af)(t) = f'(t)$,
   (c) $A : \mathbb{R}[t]_n \to \mathbb{R}[t]_{n+1},\ (Af)(t) = tf(t)$,
   (d) $A : \mathbb{R}[t]_n \to \mathbb{R}[t]_n,\ (Af)(t) = f(2t+4)$,
   (e) $A : \mathbb{R}[t]_n \to \mathbb{R}[t]_n,\ (Af)(t) = f(0)$,
   (f) $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ A(x_i)_{i=1}^n = c(x_i)_{i=1}^n$ ($c \in \mathbb{R}$ fixiert),
7. Geben Sie die Matrixdarstellungen (bezüglich der Standardbasen) der linearen Abbildung $A_\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an, der die Ebene (den $\mathbb{R}^2$ um den Winkel φ (im mathematisch positiven Sinn) um den Ursprung dreht!

   Wie sieht die Matrixdarstellung (bezüglich der Standardbasen) der Spiegelung S an der Geraden $y = x$ aus?

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Hausaufgaben- und Übungsblätter, etc.) sind unter

`https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/LinAlg1-WS1617/linalg1.php`

zu finden.