Übungen zur Linearen Algebra

1. In der Menge aller positiven reellen Zahlen $\mathbb{R}_+$ wird wie folgt eine Addition und eine Multiplikation mit Skalaren aus $\mathbb{R}$ eingeführt:
$$x \oplus y = xy,\ \alpha \odot x = x^\alpha\ (x, y \in \mathbb{R}_+,\ \alpha \in \mathbb{R}).$$
Man zeige, dass $\mathbb{R}_+$ auf diese Weise zu einem linearen Raum wird.

2. Ist $\mathbb{R}^2$ bezüglich der Operationen
$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),\ \lambda(x, y) = (\lambda x, y)$$
ein linearer Raum über $\mathbb{R}$?

3. Sei $K = \mathbb{Z}_2$ der Körper der Restklassen modulo 2. Im Koordinatenraum K^n über K werden folgende Operationen definiert
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$$
$$\gamma(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\gamma x_1, \gamma x_2, \ldots, \gamma x_n)\ (\gamma \in K).$$
   (a) Man zeige, dass K^n ein linearer Raum ist!
   (b) Man zeige, dass $a + a = 0$ für alle $a \in K^n$ gilt!
   (c) Wieviele Elemente hat K^n?

4. Sei $\mathcal{P}$ der lineare Raum aller Polynome mit komplexen Koeffizienten. Welche der folgenden Mengen sind lineare Unterräume von $\mathcal{P}$?
(a) $\{p \in \mathcal{P} : p(0) = 0\}$, (b) $\{p \in \mathcal{P} : p(0) = 1\}$, (c) $\{p \in \mathcal{P} : 2p(0) - 3p(1) = 0\}$,
(d) $\{p \in \mathcal{P} : p(1) + p(2) + \ldots + p(k) = 0\},\ k \in \mathbb{N}$ fest.

5. Seien a, b, c, d beliebige reelle Zahlen. Man zeige,
   (a) dass die Menge aller Lösungen (x, y) des Gleichungssystems
$$\begin{aligned} ax + by &= 0 \\ cx + dy &= 0 \end{aligned}$$
   einen linearen Unterraum des $\mathbb{R}^2$ bildet!
   (b) dass die Menge aller Zahlenpaare (u, v) für die das Gleichungssystem
$$\begin{aligned} ax + by &= u \\ cx + dy &= v \end{aligned}$$
   eine Lösung $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ hat, einen linearen Unterraum des $\mathbb{R}^2$ bildet!

6. (a) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ein linearer Raum über $\mathbb{R}$ ist (Bezeichnung $\mathbb{C}_\mathbb{R}$).
   (b) Zeigen Sie, dass die Menge $M_{2\times 2}$ aller reellen 2×2 Matrizen der Form
$$C_{a,b} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \qquad (a, b \in \mathbb{R}$$
   einen linearen Unterraum des Vektorraumes aller reellen 2×2 Matrizen bilden.
   (c) Finden Sie einen Vektorraumisomorphismus $\varphi : \mathbb{C}_\mathbb{R} \to M_{2\times 2}$!
   (Z) Bildet $M_{2\times 2}$ versehen mit Addition und Multiplikation von Matrizen einen Körper?

7. (a) Man zeige, dass die Elemente $a = [2, 1, 0]^T$ und $b = [1, 2, 0]^T$ linear unabhängige Elemente des $\mathbb{R}^3$ sind.
   (b) Man ergänze $\{a, b\}$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^3$.
   (c) Man bestimme alle $c \in \mathbb{R}^3$ mit der Eigenschaft, dass $\{a, b, c\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bildet.

8. Es sei $\{a_1, a_2, a_3\}$ Basis eines linearen Vektorraums V. Bilden dann die Vektoren $b_1 = a_1 + a_2$, $b_2 = a_1 + a_3$, $b_3 = a_2 + a_3$ auch eine Basis von V?

9. Man zeige, dass

$$x_1 = [1, 2, 3, \ldots, n]^T,\ x_2 = [0, 2, 3, \ldots, n]^T,\ \ldots,\ x_n = [0, 0, \ldots, n]^T$$

eine Basis im $\mathbb{R}^n$ ist. Geben Sie die Koordinaten des Vektors $v = [1, 2^2, 3^2, \ldots, n^2]^T$ in dieser Basis an!

10. Man überprüfe, ob folgende Funktionensysteme aus $\mathrm{Abb}([0, 1], \mathbb{R})$ linear unabhängig sind:
    (a) $\{1, \mathrm{e}^x, \mathrm{e}^{2x}\}$,
    (b) $\{1, \cos x, \cos 2x, \cos^2 x\}$,
    (c) $\{1, \sin x, \cos x\}$.

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Hausaufgaben- und Übungsblätter, etc.) sind unter

`https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/LinAlg1-WS1617/linalg1.php`

zu finden.