

## Übungen zur Linearen Algebra

1. Man berechne Real- und Imaginärteil folgender komplexer Zahlen:

(a)  $(2 + 3\mathbf{i})(3 - 2\mathbf{i})$ ,    (b)  $(1 + \mathbf{i})^3$ ,    (c)  $(1 + 2\mathbf{i})^6$ ,    (d)  $\frac{1 + \mathbf{i}}{1 - \mathbf{i}}$ ,    (e)  $\mathbf{i}^k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ),    (f)  $\frac{1}{1 + \mathbf{i}\sqrt{3}}$ ,  
(g)  $\frac{a + b\mathbf{i}}{a - b\mathbf{i}}$  ( $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$ ),    (h)  $\frac{(1 + \mathbf{i})^{10}}{(1 - \mathbf{i})^8}$ ,    (i)  $(a + b\mathbf{i})^n$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ),    (j)  $\frac{(1 - \mathbf{i})^5 - 1}{(1 + \mathbf{i})^5 + 1}$ .

2. Stellen Sie folgende komplexe Zahlen in trigonometrischer Form dar und berechnen Sie die vierten Potenzen dieser Zahlen sowohl unter Verwendung der binomischen Formel als auch der Formel von Moivre.

(a)  $-1$ ,    (b)  $2 - 2\mathbf{i}$ ,    (c)  $(1 + \mathbf{i})^3$ ,    (d)  $\frac{1 - \mathbf{i}}{1 + \mathbf{i}}$ ,    (e)  $\frac{2\mathbf{i}}{1 + \mathbf{i}}$ ,    (f)  $\frac{\cos \varphi + \mathbf{i} \sin \varphi}{\cos \varphi - \mathbf{i} \sin \varphi}$  ( $\varphi \in \mathbb{R}$ ).

3. Stellen Sie folgende komplexe Zahlen in trigonometrischer Form dar:

(a)  $\frac{1}{2} + \frac{\mathbf{i}\sqrt{3}}{2}$ ,    (b)  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathbf{i}$ ,    (c)  $\sin \alpha + \mathbf{i}(1 - \cos \alpha)$  ( $\alpha \in [-\pi, \pi)$ ),    (d)  $1 + \cos \frac{\pi}{4} + \mathbf{i} \sin \frac{\pi}{4}$ ,    (e)  $\frac{(1 + \mathbf{i}\sqrt{3})^5}{(1 - \mathbf{i}\sqrt{3})^3}$ .

4. Es sei  $z = x + \mathbf{i}y = r(\cos \varphi + \mathbf{i} \sin \varphi)$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi \in [-\pi, \pi)$ ,  $r > 0$  eine beliebige komplexe Zahl. Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil sowie Betrag und den Hauptwert des Arguments folgender komplexer Zahlen:

(a)  $\bar{z}$ ,    (b)  $\frac{1}{\bar{z}}$ ,    (c)  $z^2$ ,    (d)  $\mathbf{i}z$ ,    (e)  $z\bar{z}$ ,    (f)  $\left| \frac{z}{\bar{z}} \right|$ ,    (Z)  $\frac{1}{1 - z}$  für  $z \neq 1$ .

5. Berechnen Sie mithilfe der Formel von Moivre

(a)  $(1 + \mathbf{i})^{10}$ ,    (b)  $(1 - \mathbf{i}\sqrt{3})^6$ ,    (c)  $(-1 + \mathbf{i})^5$ ,    (d)  $(\sqrt{3} + \mathbf{i})^3$ ,    (e)  $(\sqrt{3} + \mathbf{i})^9$ .

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Hausaufgaben- und Übungsblätter, etc.) sind unter

<https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/LinAlg1-WS1617/linalg1.php>

zu finden.