Übungen zur Linearen Algebra

1. Zeigen Sie, dass die 4. Einheitswurzeln (d. h. die (komplexen) Lösungen von $z^4 = 1$) eine zyklische Gruppe der Ordnung 4 bezüglich der Multiplikation bilden!
   (a) Geben Sie alle erzeugenden Elemente an!
   (b) Geben Sie alle Untergruppen und deren erzeugende Elemente an!
2. Geben Sie einen Isomorphismus zwischen $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ und $(\mathbb{R}, +)$ an!
3. Geben Sie die Gruppentafel der Diedergruppe D_4 des Quadrates an und zeigen Sie, dass D_4 isomorph zu einer Untergruppe der S_4 ist.
4. Geben Sie alle abelschen Untergruppen der D_3 und D_4 an.
5. Zeigen Sie, dass die Restklassen modulo n versehen mit den üblichen Operationen „+“ und „·“ einen kommutativen Ring R mit Einselement bilden! Für welche n ist R ein Körper?
6. Wir erklären auf der Menge der 2×2-Matrizen $\mathbb{R}^{2\times 2}$ die folgenden Operationen:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{bmatrix}.$$

   (a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^{2\times 2}, +, \cdot)$ ein Ring mit Einselement bildet. Zeigen Sie, dass dieser nicht nullteilerfrei ist!
   (b) Zeigen Sie, dass die Menge der oberen Dreiecksmatrizen

$$\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \right\}$$

   einen Unterring von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ bilden!
   (c) Bildet die Menge

$$\left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \right\}$$

   einen Unterring mit Einselement von $\mathbb{R}^{2\times 2}$?

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Hausaufgaben- und Übungsblätter, etc.) sind unter

`https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/LinAlg1-WS1617/linalg1.php`

zu finden.