Technische Universität Chemnitz, Fakultät für Mathematik
Christian Sevenheck, Holger Langenau, Frank Göring

Übungen zur Linearen Algebra

1. Geben Sie die Gruppentafel der Diedergruppe D_3 des gleichseitigen Dreiecks an und zeigen Sie, dass diese isomorph zur symmetrischen Gruppe S_3 ist!

2. Es seien die Gruppen $G_1 = (\mathbb{R}\setminus\{0\}, \cdot)$ und $G_2 = (\mathbb{R}_+, \cdot)$ gegeben, $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto |x|$$

   ein surjektiver Gruppenhomomorphismus ist!

3. Zeigen Sie, dass die primen Restklassen, d. h. die Menge aller Restklassen modulo n, deren Repräsentanten zu n teilerfremd sind,

   (a) modulo 8, (b) modulo 12, (c) modulo 5, (d) modulo 10

   abelsche Gruppen bezüglich der Multiplikation bilden und geben Sie isomorphe Strukturen an!

4. Sei $\mathbb{R}[x]_1 = \{f(x) = ax + b : a, b \in \mathbb{R}\}$, die Menge der Polynome vom Grad höchstens eins mit reellen Koeffizienten, versehen mit der binären Operation $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ (Komposition).

   (a) Ist $(\mathbb{R}[x]_1, \circ)$ eine Gruppe? Wenn nicht, welche (nichttriviale) Teilmenge $\mathbb{P}_0$ bildet eine Gruppe?

   (b) Ist $(\mathbb{P}_0, \circ)$ kommutativ?

   (c) Ist $(\mathbb{P}_1, \circ)$ mit $\mathbb{P}_1 = \{f \in \mathbb{P}_0 : f(1) = 1\}$ eine Untergruppe von $(\mathbb{P}_0, \circ)$?

5. Bestimmen Sie die Bahnen und den Bahnenraum der folgenden Gruppenoperationen!

   (a) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $(r, x) \mapsto rx$,

   (b) $\mathbb{R}_+$ auf $\mathbb{R}$, $(r, x) \mapsto rx$.

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Hausaufgaben- und Übungsblätter, etc.) sind unter

`https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/LinAlg1-WS1617/linalg1.php`

zu finden.