# Übungen zur Linearen Algebra

1. Geben Sie folgende Mengen mithilfe ihrer Grundmenge und der Eigenschaft ihrer Elemente an:

$$M_1 = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}, \qquad M_2 = \{1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$$
$$M_3 = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}, \qquad M_4 = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}\frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \ldots\},$$
$$M_5 = \{-1, 1\}, \qquad M_6 = (c, d].$$

2. Geben Sie folgende Mengen durch Angabe ihrer Elemente an:

$$M_1 = \{x \in \mathbb{Z} : x = 2g_1 \text{ und } x = 3g_2;\ g_1, g_2 \in \mathbb{Z}\}, \qquad M_2 = \{x \in \mathbb{Z} : x = 2g_1 \text{ oder } x = 3g_2;\ g_1, g_2 \in \mathbb{Z}\},$$
$$M_3 = \{x \in \mathbb{R} : (x+1)^3 = x^3 + 1\}, \qquad M_4 = \{x \in \mathbb{R} : \sin x = \cos x\},$$
$$M_5 = \{x \in \mathbb{R} : \mathrm{e}^x = 0\}, \qquad M_6 = \{x \in \mathbb{R} : \sin x = -\cos x\},$$
$$M_7 = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 + 2x = (x+1)^2\}, \qquad M_8 = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 - 1} = x - 1\},$$
$$M_9 = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 = 3\}.$$

3. Geben Sie alle Teilmengen der Menge $M = \{1, 2, 3\}$ an!

4. Wieviel verschiedene Teilmengen hat eine endliche Menge $M$?

5. Bilden Sie für die Mengen $M = \{a, b\},\ I = \{1, 2, 3\}$ die Mengen $I \times M,\ M \times I,\ M^2$!

6. Seien $A, B, C$ Mengen. Zeigen Sie:
   (a) $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$,
   (b) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,
   (c) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$,
   (d) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

7. Für $t > 0$ sei $M_t = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \le t\}$. Bestimmen Sie
   (a) $\bigcup\limits_{0<t\le 1} M_t$, (b) $\bigcap\limits_{0<t\le 1} M_t$, (c) $\bigcup\limits_{0<t<1} M_t$, (d) $\bigcap\limits_{1\le t<2} M_t$, (e) $\bigcap\limits_{0<t<1} M_t$.

8. Welche der folgenden Relationen auf der Menge $X$ sind reflexiv, symmetrisch, transitiv, antisymmetrisch?
   (a) $X = \mathbb{Z},\ a \sim b \Leftrightarrow 4|(a - b)$,
   (b) $X$ – Menge aller Schüler einer Stadt, $a \sim b \Leftrightarrow a$ besucht die gleiche Schule wie $b$,
   (c) $X$ – beliebiges Mengensystem, $a \sim b \Leftrightarrow a$ ist echte Teilmenge von $b$,
   (d) $X = \mathbb{N},\ a \sim b \Leftrightarrow a \cdot b$ ungerade,
   (e) $X = \mathbb{N},\ a \sim b \Leftrightarrow a \cdot b$ gerade,
   (f) $X$ – Menge aller Geraden im $\mathbb{R}^2$, $g \sim h \Leftrightarrow g \parallel h$,
   (g) $X$ – Menge aller Geraden im $\mathbb{R}^3$, $g \sim h \Leftrightarrow g \perp h$.

9. Welche der Relationen aus Aufgabe 8 sind Äquivalenzrelationen? Wie sieht die Faktormenge aus?

10. Welche der Relationen aus Aufgabe 8 sind Ordnungsrelationen?

11. Zeigen Sie, dass folgende Relationen auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ eine Äquivalenzrelation ist:

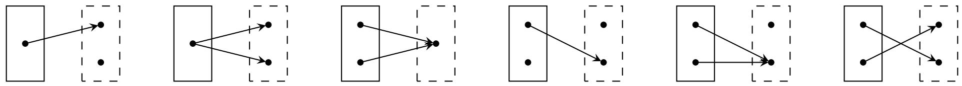
$$(a_1, b_1) \sim (a_b, b_2) \Leftrightarrow a_1 b_2 = b_1 a_2.$$

Jede Äquivalenzklasse kann dabei mit einer rationalen Zahl identifiziert werden.

12. Die Menge der Dreiecke wurde in
    (a) rechtwinklige, spitzwinklige, stumpfwinklige,
    (b) gleichseitige, gleichschenklige, ungleichseitige

    eingeteilt. Ist dadurch eine Klasseneinteilung einer Äquivalenzrelation gegeben?

13. Welche der folgenden Abbildungen stellen Funktionen dar? Sind diese injektiv, surjektiv, bijektiv?



Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Hausaufgaben- und Übungsblätter, etc.) sind unter

`https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/LinAlg1-WS1617/linalg1.php`

zu finden.