

Übungen zur Linearen Algebra

1. Machen Sie den Nenner rational:

(a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$, (b) $\frac{1}{\sqrt{3+2}}$, (c) $\frac{1}{2\sqrt{7}+\sqrt{5}}$.

2. Vereinfachen Sie:

(a) $\frac{16-49m^2}{16-28m}$, (b) $\frac{x^2-4y^2}{x^2-4xy+4y^2}$, (c) $\frac{a}{a^2-2ab+b^2} - \frac{a}{a^2-b^2} + \frac{1}{a+b}$, (d) $\frac{\frac{a+1}{a-1}-1}{\frac{a+1}{a-1}+1}$,

(e) $\frac{\frac{1}{y^2} + \frac{2}{xy} + \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{y^2} - \left(\frac{1}{x}\right)^2}$, (f) $\left(\frac{b^{-5}x^2}{a^{-6}y^{-4}}\right)^4 \cdot \left(\frac{a^4b^{-3}}{x^{-1}y^{-2}}\right)^{-6}$, (g) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$.

3. Dividieren Sie:

(a) $(21a^3 - 34a^2b + 25b^3) : (7a + 5b)$,

(b) $(9x^3 + 2y^3 - 7xy^2) : (3x - 2y)$.

4. Geben Sie zu folgenden Ausdrücken die quadratische Ergänzung an

(a) $x^2 + 6x$, (b) $z^2 - \frac{10}{7}z$, (c) $\frac{16}{49}t^2 - \frac{16}{21}t$

und leiten Sie die Lösungsformel für quadratische Gleichungen her!

5. (a) Wir wollen den Wert eines Polynoms vierten Grades,

$$p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e,$$

in einem Punkt x_0 ermitteln. Welche der folgenden Berechnungsvarianten ist günstiger?

- $p(x_0) = ax_0^4 + bx_0^3 + cx_0^2 + dx_0 + e$,
- $p(x_0) = \{[(ax_0 + b)x_0 + c]x_0 + d\}x_0 + e$.

(b) Stellen Sie das geeignetere Verfahren schematisch dar. Erproben Sie das Schema an den Beispielen

$$3x^4 + 2x - 1, x_0 = -1 \quad \text{und} \quad 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1, x_0 = \frac{1}{2}.$$

6. Bilden folgende Aussageformen für alle natürlichen Zahlen m, n, k, r wahre Aussagen?

- Wenn k die Zahl m teilt ($k|m$) und m die Zahl n teilt ($m|n$), dann gilt $k|n$.
- Wenn $k|m$ und $k|n$ gilt, dann folgt $k|(m+n)$.
- Wenn k das Produkt $m \cdot n$ teilt, dann teilt k die Zahl m oder die Zahl n .
- Wenn m und n den Rest r bei Division durch k lassen, dann lässt $m+n$ auch den Rest r .
- Gelten die Aussagen (b) und (d) für das Produkt $m \cdot n$?

Falls diese nicht immer gelten, geben Sie Bedingungen für deren Gültigkeit an!

7. Zeigen Sie, dass $\sqrt{2}$ irrational ist.

8. Gibt es unendlich viele Primzahlen? Beweisen Sie Ihre Antwort!

9. Lösen Sie folgende homogene Gleichungssysteme mithilfe des Gaußschen Algorithmus.

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} & \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{array} & \text{(b)} & \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \end{array} & \text{(c)} & x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\
 & & & & & \\
 & \begin{array}{l} -2x + 4y + z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \\ x + 2z = 0 \end{array} & \text{(d)} & & \text{(e)} & \begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \\ 3x - y + 4z = 0 \\ x + 3y - 4z = 0 \end{array}
 \end{array}$$

10. Man bestimme die Lösungen des folgenden Gleichungssystems in Abhängigkeit von λ :

$$\begin{array}{l}
 x + y + \lambda z = 0 \\
 x - \lambda y + z = 0 \\
 \lambda x - y + z = 0
 \end{array}$$

11. Lösen Sie folgende inhomogene Gleichungssysteme mithilfe des Gaußschen Algorithmus.

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} & \begin{array}{l} 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -1 \end{array} & \text{(b)} & \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 = 8 \\ 15x_1 + 10x_2 = 40 \end{array} & \text{(c)} & \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ 2x - y + z = 0 \\ 5x - y + 3z = 1 \\ x - 2y = -1 \end{array} \\
 \text{(d)} & \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 6x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 1 \\ 4x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 2 \end{array} & \text{(e)} & \begin{array}{l} x + y - z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \\ 3x - y + 3z = \lambda \end{array} & \text{(f)} & \begin{array}{l} x + y + \lambda z = 1 \\ x + \lambda y + z = 1 \\ \lambda x + y + z = 1 \end{array}
 \end{array}$$

Hinweise

Begleitend zur Vorlesung wird es jede Woche ein Übungsblatt sowie ein Hausaufgabenblatt geben. Das Übungsblatt sollen Sie unter Anleitung in der Übung lösen, das Hausaufgabenblatt soll bis zur nächsten Woche selbstständig bearbeitet werden. Natürlich können und sollen Sie sich dabei mit Ihren Kommilitonen austauschen. Die Bearbeitung der Hausaufgaben und der Übungen ist integraler Bestandteil der Vorlesung und zum Bestehen der Prüfung unerlässlich. Eine formale Voraussetzung, um an der Prüfung teilnehmen zu können, ist, dass Sie bei den Hausaufgaben mindestens 40% der Punkte erreicht haben.

Die Hausaufgaben werden korrigiert und die Lösungen werden, soweit dafür Erklärungsbedarf besteht, jeweils einmal pro Woche in den Übungen besprochen. Dabei sollen die Lösungen, soweit dies möglich ist, hauptsächlich von Ihnen selbst an der Tafel vorgerechnet werden. Dies hilft Ihnen die gefundene Lösung noch einmal zu durchdenken und trainiert Sie dabei Ihre Ideen auch vor Publikum vorzutragen.

Bei jeglichen Fragen zur Vorlesung (Stoff, Übungen, Organisatorisches, etc.) können Sie uns jederzeit per E-Mail unter

{christian.sevenheck, holger.langenau, fgoering}@mathematik.tu-chemnitz.de

erreichen. Nach Terminvereinbarung sind wir natürlich auch persönlich zu sprechen.

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Hausaufgaben- und Übungsblätter, etc.) sind unter

<https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/LinAlg1-WS1617/linalg1.php>

zu finden.