Hausaufgaben zur Linearen Algebra

1. *(6 Punkte)* Bestimmen Sie Basen der folgenden Untervektorräume.

   (a) $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\\3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\1\\5\\1\\7\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}10\\6\\12\\2\\8\\10\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\1\\1\\1\\1\\5\end{pmatrix}\right\}\subset\mathbb{R}^6$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum.

   (b) $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\\lambda\\8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix}\right\}\subset\mathbb{R}^3$ (als $\mathbb{R}$-Vektorraum) für alle $\lambda\in\mathbb{R}$.

   (c) $\operatorname{span}\{(5+i,i),(1-i\cdot 5,1)\}\subset\mathbb{C}^2$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum.

   (d) $\operatorname{span}\{(5+i,i),(1-i\cdot 5,1)\}\subset\mathbb{C}^2$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum.

2. *(3 Punkte)* Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

   (a) $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto ax+b$ für $a,b\in\mathbb{R}$ über $\mathbb{R}$.

   (b) $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $(x,y)\mapsto(x+2y,3x+4y)$ über $\mathbb{R}$.

   (c) $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $(x,y)\mapsto(x^2,y)$ über $\mathbb{R}$.

   (d) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})\to\mathbb{R}$, $ax+b\sqrt{2}\mapsto ax-b\sqrt{2}$ über $\mathbb{Q}$.

   (e) $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $z\mapsto z+\bar{z}$ über $\mathbb{C}$.

   (f) $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $z\mapsto z+\bar{z}$ über $\mathbb{R}$.

3. *(6 Punkte)*

   (a) a,b,c,d seinen linear unabhängige Vektoren eines Vektorraumes. Welche der folgenden Mengen sind linear unabhängig?

      i. $\{a-b,\ a+b,\ a+c-d,\ b+c+d\}$

      ii. $\{a+2b+d,\ 2b+c+d,\ -a-2b-c-d,\ 8a+4b-c+2d\}$

   (b) Finden Sie jeweils eine maximale Teilmenge linear unabhängiger Vektoren der folgenden Mengen von Vektoren des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{R}[X]$ und kombinieren Sie die übrigen Vektoren daraus linear.

      i. $\{1,\ X,\ X^2,\ 1+X^3\}$

      ii. $\{X^3+3X^2+3X+1,\ X^3+1,\ X^2+1,\ X+1\}$

   (c) Wir betrachten den Untervektorraum von $\mathbb{R}[X]$, der aus den Polynomen vom Grad kleiner oder gleich 4 besteht. Ergänzen Sie die folgenden Mengen von Vektoren jeweils mit Vektoren aus $\{1,\ X,\ X^2,\ X^3,\ X^4\}$ zu einer Basis.

      i. $\{3+X+2X^2+3X^3+5X^4,\ 1+6X+2X^2+3X^4,\ 4+5X^2+7X^4\}$

      ii. $\{1+2X^2+7X^3+3X^4,\ 1+X+8X^2+7X^3+12X^4,\ 2+X+4X^2+14X^3+6X^4\}$

4. *(5 points)* Let V be a vector space. An endomorphism of V, i.e., a homomorphism $\varphi: V\to V$ is called *nilpotent* if there is $k\in\mathbb{N}$ such that $\varphi^k=0$. Here we write

$$\varphi^k := \underbrace{\varphi\circ\ldots\circ\varphi}_{k-times}.$$

   Prove that given a nilpotent endomorphism $\varphi: V\to V$, the linear map $\mathrm{id}_V-\varphi$ is an automorphism of V, i.e., a bijective endomorphism. (Hint: Use that $(1-x)(1+x+x^2+\ldots+x^{k-1})=1-x^k$.)

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Übungsblätter, etc.) sind unter

`https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/LinAlg1-WS1617/linalg1.php`

zu finden.

Abgabe bis 12./13. Dezember 2016, in den Übungen