Hausaufgaben zur Linearen Algebra

1. *(3 points)* Let R and S be commutative rings. A mapping $\varphi : R \to S$ is called a ring homomorphism if $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ and $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ holds true for all $a, b \in R$. Prove the following statement: If R is a field then φ is either the zero homomorphism (i.e., $\varphi(a) = 0$ for all $a \in R$) or φ is injective.

2. *(5 Punkte)* Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume der jeweiligen Vektorräume ?
   (a) $\{(a,b,c) \in \mathbb{C}^3 \,|\, 2a + 27b = -5c \text{ und } 3a + b = 0\} \subset \mathbb{C}^3$
   (b) $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 3a + 5b + 2ab = 0\} \subset \mathbb{R}^2$
   (c) $\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a + b \geq c\} \subset \mathbb{R}^3$
   (d) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, f(x) \neq 0 \text{ für höchstens endlich viele } x \in \mathbb{R}\} \subset \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
   (e) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, f(x) \in \mathbb{Q} \;\; \forall x \in \mathbb{R}\} \subset \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

3. *(2 Punkte)* Sei V der $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{Q}^n$ und W der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^n$. Gegeben sei eine linear unabhängige Familie $v_1, \ldots, v_r$ von Vektoren aus V, hierbei ist $r \leq n$. Aufgrund der Inklusion $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ sind $v_1, \ldots, v_n$ auch Elemente aus W. Zeigen Sie, dass sie auch in W linear unabhängig sind.

4. *(10 Punkte)*
   (a) Zeigen Sie, dass die folgenden Vektoren linear unabhängig sind. Welche sind Basen ?
      i. $(0,2,1), (1,5,3) \in \mathbb{R}^3$
      ii. $(1,1,0), (1,1,1), (0,1,-1) \in \mathbb{R}^3$
      iii. $(\pi, 0), (0,1) \in \mathbb{R}^2$
   (b) Wir betrachten die Menge $V = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ (siehe Aufgabe 4, Blatt 3) als Vektorraum über dem Körper $\mathbb{Q}$. Untersuchen Sie die folgenden Vektoren aus V auf lineare Unabhängigkeit.
      i. 10 und $3 + \sqrt{2}$
      ii. $6 + \sqrt{8}$ und $3 + \sqrt{2}$
      iii. 10 und $3 + \sqrt{32} \cdot \sqrt{2}$
   (c) Seien (a,b) und (c,d) zwei Elemente des Vektorraumes $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass sie genau dann linear abhängig sind, wenn $ad - bc = 0$ ist.
   (d) Sei V der Vektorraum $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Beweisen Sie, dass die folgenden Paare von Vektoren $f, g \in V$ jeweils linear unabhängig sind.
      i. $f(x) = x$ und $g(x) = 1$
      ii. $f(x) = x$ und $g(x) = \sin(x)$
      iii. $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = \sin(2x)$

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Übungsblätter, etc.) sind unter

`https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/LinAlg1-WS1617/linalg1.php`

zu finden.

Abgabe bis 5./6. Dezember 2016, in den Übungen